

Algebra und Zahlentheorie.

Witt, Ernst: Riemann-Rochscher Satz und Z -Funktion im Hyperkomplexen. Math. Ann. 110, 12—28 (1934).

F. K. Schmidt [Math. Z. 33, (1931); dies. Zbl. 1, 54] hatte gezeigt, daß der Riemann-Rochsche Satz der algebraischen Funktionenkörper, mit Galoisfeld als Konstantenbereich, die Funktionalgleichung der zugehörigen ζ -Funktion ergibt. Für den Riemann-Rochschen Satz hatte er dabei, in Fortentwicklung von Dedekind-Weber, einen Beweis gegeben, der für beliebigen vollkommenen Körper als Konstantenbereich gültig bleibt. — Hier wird gezeigt, daß diese Resultate auch im Hyperkomplexen gültig bleiben, für Divisionsalgebren bzw. einfache Systeme mit den oben charakterisierten Funktionenkörpern als Zentrum. Das wesentlich Neue ist dabei die Einführung des Systeminvarianten, Gruppoids der einseitigen Divisoren; es wird durch Auszeichnung einer Variablen z aus dem zugehörigen Idealgruppoid gewonnen, durch formale Zuhilfenahme der den unendlichen Stellen (Bewertungen) entsprechenden Komponenten; die Unabhängigkeit von z wird gezeigt. Einsdivisoren sind diejenigen, deren Komponenten in den zugehörigen p -adischen Systemen Maximalordnungen sind; jedem solchen Einsdivisor entspricht ein Differentialdivisor, dessen Ordnung $2G - 2$ eine Invariante des Systems wird. Der Mengendurchschnitt aller p -adischen Komponenten eines Divisors bildet einen Modul von endlichem Rang nach dem Konstantenbereich. Der Riemann-Rochsche Satz spricht sich jetzt aus als eine Beziehung zwischen dem Rang des Moduls eines Divisors und seines komplementären (Dimension von Divisorenklasse und Ergänzungsklasse); die Form ist genau die übliche, mit G als Geschlecht. — Von nun an ist der Konstantenbereich ein Galoisfeld. Die Funktionalgleichung der Z -Funktion wird wesentlich im Anschluß an F. K. Schmidt gewonnen. Die Betrachtung der Z -Funktion ergibt die wichtige Tatsache, daß jede echte Divisionsalgebra in mindestens zwei Stellen verzweigt ist; oder abgeschwächt: jede überall zerfallende Algebra zerfällt schlechthin. Das ergibt noch vermöge Kreiskörper als Zerfällungskörper — Satz von Tsen — eine Übersicht über alle Typen von Algebren und Überlagerung der Resultate von Hasse, Math. Ann. 107, 731 (vgl. dies. Zbl. 6, 152).

E. Noether (Bryn Mawr).

Schmidt, Friedrich Karl: Über die Kennzeichnung algebraischer Funktionenkörper durch ihren Regularitätsbereich. J. reine angew. Math. 171, 162—169 (1934).

k sei ein endlicher algebraischer Funktionen- oder Zahlkörper, K eine endliche algebraische Erweiterung von k . Der Regularitätsbereich $\mathfrak{R}(K)$ von K/k ist die Menge der Primideale von k , die in K mindestens einen Primfaktor vom Relativgrad 1 haben. Für Zahlkörper gilt bekanntlich (Satz von Bauer): Ist für einen Normalkörper N/k , bis auf endlich viel Ausnahmen $\mathfrak{R}(N) \supseteq \mathfrak{R}(K)$, so ist $N \subseteq K$ und umgekehrt (K beliebig). Dieser Satz ist eine Folge des Frobeniusschen Satzes, daß es in einem Normalkörper N/k unendlich viel Primideale gibt, deren Zerlegungsgruppe eine vorgegebene zyklische Untergruppe der Galois-Gruppe \mathfrak{G} von N/k ist. Beide Sätze werden übertragen auf Funktionenkörper k , in deren Konstantenkörper Ω der Hilbertsche Reduzibilitätssatz gilt [d. h.: in einem beliebigen irred. Polynom $P(x; u_1, \dots, u_n)$ über Ω können die u_i auf unendlich viele Weisen so durch Elemente a_i von Ω ersetzt werden, daß $P(x; a_1, \dots, a_n)$ auch irred.]. Beim Analogon des Frobeniusschen Satzes darf dann sogar eine beliebige Untergruppe von \mathfrak{G} vorgeschrieben werden. Anders ausgedrückt: Es gibt unendlich viele Primideale, deren Zerlegungskörper ein vorgegebener Teilkörper K' von N ist. Dies gilt allgemeiner: In einem (nicht notwendig Frobeniusschen) K/k gibt es unendlich viele Primideale, deren zugehörige Primideale

in einem vorgegebenen Teilkörper K' von K den Grad 1 in bezug auf k haben und deren Grad in bezug auf K' gleich $(K:K')$ ist. Beweis: Aus dem Irreduzibilitätssatz folgt für einen rein transzendenten Grundkörper $\Omega(\eta)$ die Existenz unendlich vieler Primideale vom Grad 1 in bezug auf Ω , die in K unzerlegt bleiben. Denkt man sich K' durch ein Element η erzeugt und hat man $k = \Omega(z, x)$, $K' = \Omega(z, \eta)$, so ergibt Anwendung dieses Existenzsatzes auf $K/\Omega(\eta)$ die Existenz unendlich vieler \mathfrak{P} in $\Omega(\eta)$, die in K unzerlegt bleiben, die aber vom Grad 1 in bezug auf Ω sind; und von diesen weist man dann nach, daß sie von der verlangten Art sind.

Deuring (Leipzig).

Iyanaga, S.: Zum Beweise des Hauptidealsatzes. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 10, 349—357 (1934).

Der Satz, daß jedes Ideal eines algebraischen Zahlkörpers \mathfrak{f} im vollständigen Hilbertschen Klassenkörper von \mathfrak{f} Hauptideal wird, läßt sich nach Artin auf einen von Furtwängler bewiesenen gruppentheoretischen Satz zurückführen. Dieser wird hier in besonders übersichtlicher Weise abgeleitet. — \mathfrak{G} sei eine Gruppe mit einem Abelschen Normalteiler \mathfrak{U} von endlichem Index; $[\Gamma]$ sei der Gruppenring von $\mathfrak{g} = \mathfrak{G}/\mathfrak{U}$; $\varrho, \sigma, \tau, \dots$ seien die Elemente von \mathfrak{g} , $S_\varrho, S_\sigma, \dots$ seien feste Repräsentanten der Elemente von \mathfrak{G} in \mathfrak{G} , und $\varrho + \sigma + \tau + \dots$ heiße Γ . Ist U Element von \mathfrak{U} , so wird für $S_\sigma U S_\sigma^{-1}$ kurz U^{σ} für $\prod_{(\sigma)} (U^{\sigma})^a$ stets $U^{\sum c_\sigma \sigma}$ geschrieben, wobei σ \mathfrak{g} durchläuft. Kann man durch geeignete

Wahl der S_σ erreichen, daß die in \mathfrak{U} enthaltenen Elemente $S_\sigma S_\tau S_\sigma^{-1} = D_{\sigma, \tau}$ („Faktorensystem“) alle gleich 1 werden, so heißt \mathfrak{G} „vollständig zerfallend“. Es gilt nun der „Satz von Artin“: Es gibt eine Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$, die \mathfrak{G} als Untergruppe enthält und einen Abelschen Normalteiler $\overline{\mathfrak{U}}$ besitzt, so daß (1.) \mathfrak{U} Untergruppe von $\overline{\mathfrak{U}}$ ist, (2.) $\overline{\mathfrak{G}}/\overline{\mathfrak{U}}$ isomorph mit $\mathfrak{G}/\mathfrak{U}$ ist, (3.) als Repräsentanten der Restklassen von $\overline{\mathfrak{U}}$ in $\overline{\mathfrak{G}}$ die Elemente S_σ gewählt werden können und (4.) $\overline{\mathfrak{G}}$ vollständig zerfällt. — Der zu beweisende gruppentheoretische Satz läßt sich so aussprechen: Wenn \mathfrak{U} die Kommutatorgruppe \mathfrak{G}' von \mathfrak{G} ist, ist $\prod_{(\sigma)} D_{\sigma, \tau} = 1$. Nach dem Artinschen Satz läßt er sich aus dem Satz ableiten.

Ist \mathfrak{G}' in \mathfrak{U} als Untergruppe vom endlichen Index e enthalten, so ist für jedes Element \overline{U} aus $\overline{\mathfrak{U}}$ $\overline{U}^e = 1$. Hierfür wird in ganz einfacher Weise gezeigt: Das „Ordnungsideal“ \mathfrak{o} von $\overline{\mathfrak{U}}$ ist ein Hauptideal $(c\Gamma)$ mit $c|e$. Dabei ist \mathfrak{o} ein in $[\Gamma]$ enthaltenes Ideal, das folgendermaßen konstruiert wird: A_λ ($\lambda = 1, \dots, l$) seien Elemente aus $\overline{\mathfrak{U}}$, deren symbolische Potenzen $A_\lambda^{\gamma_{i\lambda}}$ $\overline{\mathfrak{U}}$ erzeugen. Zwischen den A^σ bestehen endlich viele Relationen $\prod_{\lambda} A_\lambda^{\gamma_{i\lambda}} = 1$ ($i = 1, \dots, n$) mit $\gamma_{i\lambda}$ aus $[\Gamma]$, aus denen alle anderen derartigen Relationen folgen. \mathfrak{o} ist dann das von allen l -reihigen Determinanten der Matrix $(\gamma_{i\lambda})$ erzeugte Ideal; es ist unabhängig von der Wahl der A_λ , und für jedes Element A aus $\overline{\mathfrak{U}}$ gilt $\overline{U}^A = 1$.

Magnus (Frankfurt a. M.).

Grün, Otto: Über Substitutionsgruppen im Galoisfeld $G(p^f)$. J. reine angew. Math. 171, 170—172 (1934).

Verf. untersucht die Struktur der Sylowgruppen von Substitutionsgruppen \mathfrak{G}_n n -ten Grades mit Koeffizienten aus $G(p^f)$ (Kongruenzgruppen). Ist l eine Primzahl, so bezeichnet er mit m_l die kleinste Zahl, für die $p^{f m_l} \equiv 1 \pmod{l}$ gilt. — Dann beweist er: 1. Für \mathfrak{G}_{m_l} sind die l -Sylowgruppen zyklisch von der Ordnung l^i , wobei $p^{f m_l} - 1$ genau durch l^i teilbar ist. — 2. Ist $\left[\frac{n}{m_l} \right] = r < l$, so sind die l -Sylowgruppen von \mathfrak{G}_n abelsch von der Ordnung l^r und vom Typ (i, i, \dots, i) . — 3. Ist $l^r \leq \left[\frac{n}{m_l} \right] < l^{r+1}$, so sind die l -Sylowgruppen von \mathfrak{G}_n genau $(r+1)$ -stufig metabelsch (d. h. erst ihre r -ten Kommutatorgruppen sind abelsch). — Beim Beweise faßt der Verf. die Koeffizienten der Matrizen von \mathfrak{G}_n als Kongruenzreste modulo p auf, wobei p ein Primideal vom Grade f in einem algebraischen Zahlkörper k ist. Bei Adjunktion von l^i -ten Ein

Wurzeln ε zu k zerfällt p in Primideale vom Relativgrade m_i . Dann beweist der Verf., daß die Matrizen des Zentrums einer l -Sylowgruppe von G_{m_i} voneinander und von 1 verschiedene charakteristische Wurzeln haben, und daß sie innerhalb $k(\varepsilon)$ auf Diagonalform gebracht werden können, woraus folgt, daß diese l -Sylowgruppe abelsch ist. — Analoge Überlegungen erlauben dem Verf., alle erwähnten Sätze zu beweisen.

N. Tschebotarow (Kasan).

● **Noether, Emmy: Zerfallende verschränkte Produkte und ihre Maximalordnungen.** *Actualités scient. et industr.* Nr. 148. *Exposés math. publiés à la mémoire de Jacques Herbrand.* IV.) Paris: Hermann & Cie. 1934. 15 S. Fres. 5.—

Sei K eine einfache Algebra über einem algebraischen Zahlkörper als Zentrum und \mathfrak{o} ein maximaler kommutativer Teilkörper von K . Verf. behandelt die Beziehungen zwischen den Maximalordnungen \mathfrak{O} von K und den sämtlichen Ordnungen \mathfrak{o} von k . Faßt man im Spezialfall einer vollständigen Matrixalgebra K alle \mathfrak{O} , die mit k den gleichen Durchschnitt \mathfrak{o} haben, in ein Gebiet G zusammen, so ergibt sich eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Gebieten G von K und den Ordnungen \mathfrak{o} von k . Dabei werden die \mathfrak{O} eines G ineinander transformiert durch die Ideale von K , die aus den Moduln des zugehörigen \mathfrak{o} durch Erweiterung gebildet sind. Ist \mathfrak{o} die Hauptordnung von k , so heißt das zugehörige G ein Hauptgebiet von K ; man erhält dann eine Charakterisierung der Erweiterungs Ideale von k innerhalb K . Für den allgemeinen Fall einer beliebigen einfachen Algebra K gelten entsprechende Tatsachen, wenn man für die Gebietseinteilung noch das Übereinstimmen der Komponenten an den Verzweigungstellen fordert und sich auf zur Differenten prime Ideale beschränkt. Insbesondere ergibt sich so ein dritter Beweis für die von Chevalley [Sur certains idéaux d'une algèbre simple. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 10, 83 (1934)] und vom Ref. (Über gewisse Ideale in einer einfachen Algebra. *Actualités scient. et industr.* Nr. 109. *Exposés mathématiques.* I.) unabhängig gefundene Charakterisierung der zur Differenten von K primen Erweiterungs Ideale von k in der einfachen Algebra K . H. Hasse (Göttingen).

Albert, A. Adrian: Normal division algebras over a modular field. *Trans. Amer. Math. Soc.* 36, 388—394 (1934).

In den meisten Arbeiten der letzten Zeit über normale Divisionsalgebren, insbesondere den R. Brauerschen, wurde über den Koeffizientenkörper K die Annahme der Vollkommenheit im Steinitzischen Sinn gemacht. Hat K eine Primzahlcharakteristik p und ist der Grad n der Divisionsalgebra zu p teilerfremd, so ist diese Voraussetzung überflüssig. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß eine normale Divisionsalgebra vom Grad n über einem vollkommenen Koeffizientenkörper K der Charakteristik p nur bei $n \not\equiv 0(p)$ bestehen kann. Es bleiben demnach auf Grund der genannten u. a. bekannten Resultate nur noch normale Divisionsalgebren vom Grade p^e über einem unvollkommenen Koeff.-Körper der Charakteristik p zu untersuchen. Es werden ferner einige Ergebnisse der Algebrentheorie bei Koeff.-Körpern der Charakteristik 0 auf den Fall unendlicher Koeff.-Körper von Primzahlcharakteristik übertragen. Zuletzt wird gezeigt, daß jede normale Divisionsalgebra vom Grade 2 bzw. 3 über einem unendlichen Koeff.-Körper der Charakteristik 2 bzw. 3 zyklisch ist. Grell (Jena).

Grant, Harold Sinclair: Concerning powers of certain classes of ideals in a cyclotomic realm which give the principal class. *Ann. of Math.*, II. s. 35, 220—238 (1934).

H. H. Mitchell [Trans. Amer. Math. Soc. 19, 119—126 (1918)] hat einen Satz gefunden, welcher als Verallgemeinerung eines bekannten Ergebnisses von Kummer aufgefaßt werden kann: „Ist $q^{p-1/2e} \equiv 1 \pmod{p}$, p, q Primzahlen, $\frac{p-1}{2e}$ ungerade und > 1 , und zerlegt man q in ein Produkt von zwei Idealen des Unterkörpers $2e$ -ten Grades von $K\left(\varepsilon^{\frac{2\pi i}{p}}\right)$, von denen jedes je ein Primideal unter den e konjugiert komplexen Primidealpaaren enthält, so ist die h -te Potenz jedes dieser Ideale ein Hauptideal, wobei h die erste Klassenzahl des in Rede stehenden Körpers ist.“ — Verf. erweitert

diesen Satz auf Körper $K\left(e^{\frac{2\pi i}{p^s}}\right)$, s beliebig. Dazu betrachtet er die von Mitchell verallgemeinerten Jacobi-Kummerschen Ψ -Funktionen

$$\Psi_{-a, -b}(\alpha) = \sum_{\tau} \alpha^{-b \text{ ind } \tau + (a+b) \text{ ind } (\tau+1)},$$

wobei $\alpha = e^{2\pi i/n}$, a, b ganz rational, so daß $a \not\equiv 0$, $b \not\equiv 0$, $a+b \not\equiv 0 \pmod{n}$, τ alle Elemente von $GF[q^t]$ durchläuft, nur die Werte 0, -1 bei ungeradem q und 0, 1 bei $q=2$ ausgenommen, und t der kleinste Exponent ist, für welchen $q^t \equiv 1 \pmod{n}$ gilt.

Es gilt $\Psi(\alpha) \Psi(\alpha^{-1}) = q^t$, $\Psi(\alpha^q) = \Psi(\alpha)$, $[\Psi_{-a, -b}(\alpha)] = \prod_{k=1}^{q(n)} q_{a_k}^{m_{a_k}}$, wo q Primidealfaktoren von q in $K\left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)$ sind und $m_{a_k} = (|a a_k| + |b a_k| - |(a+b) a_k|) : \varphi(n)$ ist ($|a|$ bezeichnet den kleinsten positiven Rest modulo n). Durch Kombination der verschiedenen Werte von a, b gelingt es dem Verf., alle verlangten Idealpotenzen durch Ψ -Funktionen darzustellen. Dabei drückt er den bekannten Ausdruck für den ersten Klassenzahlfaktor H durch gewisse Gruppendeterminanten aus, woraus nebenbei die Abschätzung $|H| \leq r! / 2^{r-\lambda+1} [(3)^{2^{\lambda-3}} - 1]$ folgt, wobei $2r = \varphi(n)$ ist, während 2 in genau in der λ -ten Potenz aufgeht. — Das Hauptergebnis der Arbeit lautet: Sind q , Primzahlen, $q \equiv 1 \pmod{p^k}$, H der erste Klassenzahlfaktor von $K(e^{2\pi i/p^k})$, so sind beliebige konjugiert imaginäre und relativ prime Idealfaktoren a, b von $[q^H] = a \cdot b$ Hauptideale.

N. Tschebotarow (Kasan).

Faddejeff, D. K.: Über die Gleichung $x^3 + y^3 = Az^3$. Trav. Inst. phys.-math. Stekloff 5, 25—40 (1934) [Russisch].

Ganzzahlige Lösungen der Gleichung $x^3 + y^3 = Az^3$ (oder rationalzahlige Lösungen der Gleichung $x^3 + y^3 = A$) werden vom Verf. als rationale Punkte der Kurve vom Geschlecht $p=1$ aufgefaßt. Sie gestatten die Darstellung

$$x = x(u) = \frac{9A + \wp'(u)}{6\wp(u)}, \quad y = y(u) = \frac{9A - \wp'(u)}{6\wp(u)},$$

wobei die Weierstraßsche elliptische Funktion $\wp(u)$ der Differentialgleichung

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - 27A^2$$

genügt. — Verf. gibt den unmittelbaren Beweis des zuerst von L. J. Mordell [Proc. Cambridge Philos. Soc. 21, 179—192 (1922)] bewiesenen Satzes, daß die den rationalen Punkten entsprechenden Werte des Argumentes u einen additiven Modul („Rationalitätsmodul“) mit endlicher Basis bilden. Die beim Beweis erhaltenen Abschätzungen erlauben dem Verf., die Gleichung $x^3 + y^3 = A$ in mehreren Fällen vollständig zu lösen: Ist z. B. A eine Primzahl, so zeigt der Verf., daß der Rationalitätsmodul höchstens 2 Basiszahlen besitzt. — Außerdem hat er einige Kriterien erhalten, die ihm erlauben zu schließen, daß eine Lösung nicht einer Basiszahl des Argumentes u entspricht. Zum Beispiel: „Eine Lösung (X, Y, Z) der Gleichung $x^3 + y^3 = Az^3$ entspricht dem dreifachen Argument u einer anderen Lösung (x, y, z) dann und nur dann, wenn $(X+Y)^2(X\zeta + Y\zeta^2)$ das Produkt von A^2 und dem Kubus einer ganzen Zahl des

Körpers $K(\zeta)$ ist, wobei $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ bedeutet.“

N. Tschebotarow (Kasan).

Faddejeff, D. K.: Über die Gleichung $x^4 - Ay^4 = \pm 1$. Trav. Inst. phys.-math. Stekloff 5, 41—52 (1934) [Russisch].

W. Tartakowsky (Bull. Acad. Sci. URSS 1926, 301—324) zeigte, daß die Gleichung $x^4 - Ay^4 = 1$ höchstens eine nichttriviale ganzzahlige Lösung hat. Er führte nämlich ihre Lösbarkeit auf die Existenz im quadratischen Ring $(1, \sqrt{A})$ einer Einheit vom Typ $X^2 + Y^2\sqrt{A}$ zurück und zeigte, daß nur fundamentale Einheiten dieses Ringes von diesem Typ sein können. Nur der Fall $A=15$ blieb unerledigt. — Verf. benutzt die Zerlegung

$$(x^4 - Ay^4) = (x^2 + xy\sqrt[4]{-4A} + y^2\sqrt{-A})(x^2 - xy\sqrt[4]{-4A} + y^2\sqrt{-A})$$

und zeigt, daß jeder Lösung der Gleichung $x^4 - Ay^4 = \pm 1$ eine „dreigliedrige“ Einheit von der Gestalt $a + b\sqrt[3]{-4A} + c\sqrt{-A}$ des Ringes $(1, \sqrt[3]{-4A}, \sqrt{-A}, \sqrt[3]{-4A})$ entspricht und umgekehrt. Weiter zeigt er, daß jede dreigliedrige Einheit dieses Ringes nur eine fundamentale Einheit sein kann. Dazu benutzt er analoge Überlegungen wie B. Delaunay [Math. Z. 28, 1—9 (1928)] für den kubischen Ring $(1, \sqrt[3]{q}, \sqrt[3]{q^2})$. Dies erlaubt dem Verf., zu zeigen, daß im Falle $A = 15$ die Gleichung $x^4 - Ay^4 = \pm 1$ nur die triviale Lösung $(\pm 1, 0)$ besitzt. — Diese Methode kann aber nicht auf die Gleichung $x^{2n} - Ay^{2n} = \pm 1$ ($n > 2$) erweitert werden, wie das von der Methode von Tartakowsky der Fall ist.

N. Tschebotaröw (Kasan).

● **Cazalas, E.: Carrés magiques au degré n . Séries numériques de G. Tarry.** Paris: Hermann & Cie. 1934. 192 S. et 36 Fig. Frs. 40.—

Das Buch gibt die Weiterentwicklung einer Theorie, deren Anfang von G. Tarry C. R. Acad. Sci., Paris, Mars 1906) herrührt, für die Konstruktion von magischen Quadraten der Zahlen $0, 1, \dots, m-1$, welche die Eigenschaft der k -Magie haben: Ersetzt man alle Zahlen durch ihre 2-te, 3-te, ..., k -te Potenz, so entsteht jedesmal ein Quadrat, worin jede Reihe, Kolonne und beide Diagonalen gleiche Summen haben. Im Abschnitt 1 werden m. Q. auf folgende Art konstruiert: Ist p eine Primzahl, so läßt sich jede Zahl $N < p^n$ im Zahlensystem der Basis p mit n Ziffern schreiben. Ist also $N_1 = a_1, a_2, \dots, a_n$ und $N_2 = b_1, b_2, \dots, b_n$, so bedeute $[N_1 + N_2]$ die Zahl, deren n Ziffern bestimmt sind durch $c_i \equiv a_i + b_i \pmod{p}$. Weiter bedeute (r_1) die Reihe $0, r_1, [2r_1], \dots, [(p-1)r_1]$. Ist r_2 eine nicht zu (r_1) gehörende Zahl, so kann man die Reihe von p^2 Gliedern bilden: $(r_1 r_2) = \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{p-1} [[kr_1] + [lr_2]]$. Auch $(r_1 r_2 r_3)$ usw. Unter gewissen Bedingungen sind nun die Glieder von $(r_1 r_2)$ die Elemente eines m. Q., dessen erste Reihe (r_1) , die zweite $r_2, [r_1 + r_2], [[2r_1] + r_2]$ ist usw. Dieses m. Q. hat die magische Summe sogar auch in allen gebrochenen Diagonalen. Im Abschnitt 2 werden auf analoge Art m. Q. gebildet von p^4 Zahlen und wird die 2-Magie behandelt. Ist $N = ap^3 + bp^2 + cp + d$, so ist, wenn das Quadrat magisch ist, für jede Reihe, Kolonne und beide Diagonalen

$$\sum a^2 = \sum b^2 = \sum c^2 = \sum d^2 = p \sum_{i=0}^{p-1} i^2 = \frac{1}{6} p^2 (p-1)(2p-1).$$

Die reichende Bedingung für die 2-Magie ist also, wie sich leicht kontrollieren läßt: $\sum ab = \sum ac = \sum ad = \sum bc = \sum bd = \sum cd = \frac{1}{4} (p-1)^2 p^2$. Verschiedene 2-magische Quadrate werden gefunden. Auf genau dieselbe Art werden in folgenden Abschnitten Quadrate mit Seitenzahlen $m = p^n$ behandelt. Bibliographie und Geschichte; der ersten fehlen Arbeiten von D. N. Lehmer. N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

● **Kuzmin, R.: Sur les zéro de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann.** C. R. Acad. Sci. URSS 2, 1934—400 u. franz. Zusammenfassung 400 (1934) [Russisch].

Verf. teilt mit, daß er mit einer Siegelschen Methode (s. dies. Zbl. 4, 105)

$$N(T) > \frac{3}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}T} T + o(T)$$

er die Anzahl $N(T)$ der Wurzeln von $\zeta(s)$ auf $s = \frac{1}{2} + it, 0 < t < T$, erhalten habe. — Der Beweis wird nur angedeutet.

A. Walfisz (Radość, Polen).

● **Titchmarsh, E. C.: On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann. IV.** Quart. J. Math., Oxford Ser. 5, 98—105 (1934).

Es sei

$$0, \pi^{it} \Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{it}{2}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right) = e^{-2i\vartheta}, \vartheta = \vartheta(t) = \frac{t}{2} (\log t - \log 2\pi - 1) - \frac{\pi}{8} + o(1);$$

$$\nu \geq 1 \text{ ganz, } \vartheta(t_\nu) = \nu\pi \left(\text{es ist } t_\nu \sim \frac{2\pi\nu}{\log \nu} \right); I_\nu \text{ das Intervall } s = \frac{1}{2} + it, t_\nu \leq t \leq t_{\nu+1};$$

$$) = e^{i\vartheta} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \text{ (reell!)}. — \text{Man hat gewisse Anhaltspunkte zu vermuten, daß}$$

„sehr viele“ I_ν Nullstellen von $\zeta(s)$ enthalten. Verf. zeigt: Ist $G(T)$ die Anzahl der auf $s = \frac{1}{2} + it$, $0 < t < T$ liegenden I_ν , in denen $\zeta(s)$ eine Wurzel besitzt, so gilt

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} G(T) T^{-\frac{1}{2}} \log T > 0.$$

Dies folgt leicht aus

$$(1) \quad \sum_{\nu \leq x} f(t_\nu) f(t_{\nu+1}) = -\frac{\gamma+1}{2}x + O(x \log^{-\frac{1}{2}}x),$$

γ Eulersche Konstante. — Ferner zeigt Verf. auf verhältnismäßig einfache Art, daß

$$(2) \quad \sum_{\nu \leq x} (-1)^\nu f(t_\nu) = x + O(x^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{1}{2}}x),$$

woraus schon der Hardy'sche Satz hervorgeht, daß $\zeta(s)$ auf $\sigma = \frac{1}{2}$ unendlich viele Wurzeln besitzt. — Der Beweis von (1) muß an einigen Stellen berichtigt und ergänzt werden; es genügt der Hinweis, daß in § 4 die Monotonie von $\psi'(x)$ nicht untersucht worden ist. (III. vgl. dies. Zbl. 5, 53.) *A. Walfisz* (Radość, Polen).

Košliakov, N.: Some integral representations of the square of Riemann's function $\Xi(t)$. C. R. Acad. Sci. URSS 2, 401—404 u. engl. Zusammenfassung 404—405 (1934) [Russisch].

Bezeichnungen: $x > 0$, t reell, $a > 0$, $b > 0$, $ab = 4\pi^2$, $n \geq 1$ ganz, $d(n)$ die Anzahl der Teiler von n , $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\xi = x e^{\alpha i}$, γ die Eulersche Konstante, J_0 und K_0 Besselsche Funktionen,

$$\Xi(t) = \left\{ \left(\frac{\pi}{2} \right)^{-s} s(s-1) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) \right\}_{s=\frac{1}{2}+it},$$

$$\sigma(x) = -\gamma - \log x - \frac{1}{4\pi x} + \frac{x}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{x^2 + n^2},$$

$$\Psi(x) = (2\pi)^{\frac{3}{2}} e^{-3x} \int_0^{\infty} z J_0(2\pi z e^{-2x}) \left(\sigma(z) + \frac{1}{4\pi z} \right) dz,$$

$$\psi(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} d(n) K_0(2\pi n \xi),$$

$$\lambda(x, t) = \frac{3}{3^2 + t^2} - \frac{1}{2^2} \frac{7x^2}{7^2 + t^2} + \frac{1}{2^2 \cdot 4^2} \frac{11x^4}{11^2 + t^2} - \dots,$$

$$\Omega(x, t) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{4\pi} \frac{1}{1+t^2} + x^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} \lambda(zx, t) \sigma(z) z dz.$$

Hauptformeln:

$$(1) \quad \Xi^2(t) = \frac{\log 4\pi - \gamma}{16} + \frac{1}{8} + \left(\frac{\log 4\pi - \gamma}{4} - \frac{1}{2} \right) t^2 - 2 \left(t^2 + \frac{1}{4} \right) \int_1^{\infty} z^{-\frac{1}{2}} \psi(z) \cos(t \log z) dz$$

$$(2) \quad \int_0^{\infty} \frac{\cosh \alpha z}{(z^2 + \frac{1}{4})^2} \Xi^2(z) dz = \frac{\pi}{2} \alpha \sin \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2} (\gamma - \log 4\pi) \cos \frac{\alpha}{2} \\ + \frac{\pi}{4} e^{\frac{\alpha i}{2}} (\gamma - \log 4\pi + i \alpha 4\psi(e^{\alpha i})),$$

$$(3) \quad \frac{1}{4(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \cosh \frac{\pi t}{2} \left| \Gamma\left(-\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right) \right|^4 \cos\left(\frac{t}{4} \log \frac{a}{b}\right) \Xi^2\left(\frac{t}{2}\right) = \Omega(a, t) + \Omega(b, t),$$

$$(3_1) \quad \Xi^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{8(2\pi)^{\frac{3}{2}}}{\cosh \frac{\pi t}{2} \left| \Gamma\left(-\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right) \right|^4} \int_0^{\infty} \Psi(z) \cos tz dz,$$

$$(4) \quad a^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} z J_0(az) \left(\sigma(z) + \frac{1}{4\pi z} \right) dz = b^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} z J_0(bz) \left(\sigma(z) + \frac{1}{4\pi z} \right) dz.$$

Analoge Formeln (1*)—(4*) einfacherer Bauart, die aus \mathcal{E} (nicht \mathcal{E}^2) entspringen, kommen bei Ramanujan (1*, 3*, 4*) und Hardy (2*) vor. — Die Beweise von (1)—(4) werden in der vorliegenden Note nur kurz skizziert. A. Walfisz (Radoś, Polen).

Košliakov, N.: Some identities in the analytical theory of numbers. C. R. Acad. Sci. URSS 2, 342—345 u. engl. Zusammenfassung 345 (1934) [Russisch].

Bezeichnungen und Annahmen: $-\frac{1}{2} < \nu < \frac{1}{2}$, σ und t reell, $s = \sigma + it$, $\omega = e^{\frac{\pi i}{4}}$, $\bar{\omega} = e^{-\frac{\pi i}{4}}$, $\varepsilon > 0$ beliebig, $n \geq 1$ ganz, $a_\nu(n) = O(n^{\nu+\varepsilon})$, $b_\nu(n) = O(n^{\nu+\varepsilon})$;

$$\varphi_\nu(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_\nu(n) n^{-s}, \quad \psi_\nu(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_\nu(n) n^{-s} \quad (\sigma > \nu + 1);$$

$$A^s \Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right) \varphi_\nu(s) = A^{1-s} \Gamma\left(\frac{1-s+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-s-\nu}{2}\right) \psi_\nu(1-s),$$

mit geeignetem $A > 0$; $x > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha\beta = \frac{4}{A^2}$; J und K Besselsche Funktionen;

* [**] bedeute: die Definition [Behauptung] gelte [gilt], wenn man $f, h, k, \varphi, \psi, a$ der Reihe nach durch $g, j, l, \psi, \varphi, b$ ersetzt;

$$(*) \quad f_\nu(x) = \frac{2}{A\pi} \sum_{n=1}^{\infty} b_\nu(n) \left\{ e^{\frac{\nu\pi i}{2}} K_{2\nu}\left(\frac{4\omega\sqrt{nx}}{A}\right) + e^{-\frac{\nu\pi i}{2}} K_{2\nu}\left(\frac{4\bar{\omega}\sqrt{nx}}{A}\right) \right\},$$

$$(*) \quad h_\nu(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{\nu\pi i}{4}} J_\nu(\bar{\omega}x\sqrt{u}) + e^{\frac{\nu\pi i}{4}} J_\nu(\omega x\sqrt{u}) \right) f_\nu(\sqrt{u}) du \\ - \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}} A^{2\nu-1} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \psi_\nu(\nu) \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu-2} \sin \frac{\nu\pi}{2},$$

$$(*) \quad k_\nu(x) = \frac{1}{2i} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{\nu\pi i}{4}} J_\nu(\bar{\omega}x\sqrt{u}) - e^{\frac{\nu\pi i}{4}} J_\nu(\omega x\sqrt{u}) \right) f_\nu(\sqrt{u}) du \\ - \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}} A^{2\nu-1} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \psi_\nu(\nu) \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu-2} \cos \frac{\nu\pi}{2}.$$

Hauptformeln (ohne Beweis mitgeteilt):

$$(**) \quad \pi f_\nu(x) = -\varphi_\nu(\nu) x^{\nu-1} + \psi_\nu(\nu) \Gamma(2\nu) \left(\frac{2}{A}\right)^{1-2\nu} x^{-\nu} + \psi_\nu(-\nu) \Gamma(-2\nu) \left(\frac{2}{A}\right)^{1+2\nu} x^\nu \cos \nu\pi \\ + x^{\nu+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_\nu(n)}{n^\nu} \frac{1}{x^2 + n^2} \quad (\nu \neq 0),$$

$$\sqrt{x} \left\{ \Gamma(\nu) \varphi_\nu(\nu) A^\nu x^{\nu-1} + \Gamma(-\nu) \varphi_\nu(-\nu) A^{-\nu} x^{-\nu-1} - \frac{2}{x} \sum_{n=1}^{\infty} a_\nu(n) K_\nu\left(\frac{2n}{Ax}\right) \right\} \\ = \sqrt{\frac{1}{x}} \left\{ \Gamma(\nu) \psi_\nu(\nu) A^\nu x^{-\nu+1} + \Gamma(-\nu) \psi_\nu(-\nu) A^{-\nu} x^{\nu+1} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} b_\nu(n) K_\nu\left(\frac{2nx}{A}\right) \right\},$$

$$(**) \quad \varphi_\nu(s) = 2 \sin \frac{\pi}{2} (s - \nu) \cdot \int_0^\infty f_\nu(u) u^{-s} du \quad (\sigma < \nu),$$

$$(**) \quad \int_0^\infty J_{2\nu}\left(\frac{4}{A}\sqrt{xu}\right) \left\{ f_\nu(u) + \frac{1}{\pi} \varphi_\nu(\nu) u^{\nu-1} \right\} du = \frac{A}{2} \left(g_\nu(x) + \frac{1}{\pi} \psi_\nu(\nu) x^{\nu-1} \right), \\ \alpha^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty u J_\nu(\alpha u) \left\{ f_\nu(u) + \frac{1}{\pi} \varphi_\nu(\nu) u^{\nu-1} \right\} du = \beta^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty u J_\nu(\beta u) \left\{ g_\nu(u) + \frac{1}{\pi} \psi_\nu(\nu) u^{\nu-1} \right\} du,$$

$$k_\nu(\alpha) - h_\nu(\alpha) = \sqrt{\frac{2\beta^3}{\alpha^3}} \left\{ \cos \frac{\nu\pi}{2} \cdot j_\nu(\beta) - \sin \frac{\nu\pi}{2} \cdot l_\nu(\beta) \right\},$$

$$k_\nu(\alpha) + h_\nu(\alpha) = \sqrt{\frac{2\beta^3}{\alpha^3}} \left\{ \cos \frac{\nu\pi}{2} \cdot l_\nu(\beta) + \sin \frac{\nu\pi}{2} \cdot j_\nu(\beta) \right\},$$

$$(**) \quad \pi \sum_{m=1}^{\infty} a_{\nu}(m) f_{\nu}(m) m^{1-2\nu} = \psi_{\nu}(\nu) \varphi_{\nu}(3\nu-1) \Gamma(2\nu) \left(\frac{2}{A}\right)^{1-2\nu} \\ + \psi_{\nu}(-\nu) \varphi_{\nu}(\nu-1) \Gamma(1-2\nu) \left(\frac{2}{A}\right)^{1-2\nu} \cos \nu \pi - \frac{1}{2} \varphi_{\nu}^2(\nu) \quad (\nu \neq 0),$$

$$(***) \quad \pi \sum_{m=1}^{\infty} a_{\nu}(m) f_{\nu}(m) m^{4n+1-2\nu} = \psi_{\nu}(\nu) \varphi_{\nu}(3\nu-4n-1) \Gamma(2\nu) \left(\frac{2}{A}\right)^{1-2\nu} \\ + \psi_{\nu}(-\nu) \varphi_{\nu}(\nu-4n-1) \Gamma(-2\nu) \left(\frac{2}{A}\right)^{1-2\nu} \cos \nu \pi \quad (\nu \neq 0).$$

A. Walfisz (Radość, Polen).

Shah, S. M.: On inequalities satisfied by certain arithmetical functions. Indian Phys.-Math. J. 5, 9—16 (1934).

This paper contains improved forms of the inequalities for $\pi_{\nu}(x)$ (the number of integers not exceeding x which are products of just ν different primes) and the associated functions $\bar{\omega}_{\nu}(x)$, $\Pi_{\nu}(x)$, which were established by Hardy and Ramanujan (Coll. Papers of S. Ramanujan, 265—273). For $\pi_{\nu}(x)$ the author proves:

$$\pi_{\nu+1}(x) < (1 + \theta) \frac{x}{\log x} \frac{(\log \log x + B)^{\nu}}{\nu!}$$

for $\nu = 0, 1, 2, \dots$, any $\theta > 0$, and $x \geq x_0(\theta)$. Here

$$B = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} - \log \log x \right).$$

Davenport (Cambridge).

Besicovitch, A. S.: The asymptotic distribution of the numerals in the decimal representation of the squares of the natural numbers. Math. Z. 39, 146—156 (1934).

Sei $B \geq 2$ eine feste natürliche Zahl. Jede natürliche Zahl m läßt sich bekanntlich auf genau eine Art in der Form

$$m = a_{\mu} B^{\mu} + a_{\mu-1} B^{\mu-1} + \dots + a_1 B + a_0,$$

oder symbolisch $m = a_{\mu} a_{\mu-1} \dots a_1 a_0$, darstellen, wobei die a_i ganze Zahlen der Reihe $0, 1, \dots, B-1$ sind und speziell $a_{\mu} \neq 0$ ist. Sei $\varepsilon > 0$, a eine der Ziffern $0, 1, \dots, B-1$ und $s(m, a)$ die Anzahl Mal, daß a in der B -alen Darstellung $m = a_{\mu} a_{\mu-1} \dots a_1 a_0$ vorkommt. Wenn dann gleichzeitig

$$s(m, a) = \left(\frac{1}{B} + \theta_a \varepsilon \right) \mu \quad \text{mit} \quad |\theta_a| \leq 1 \quad (a = 0, 1, \dots, B-1)$$

ist, so heißt die Zahl m ε -normal. Verf. zeigt die beiden Sätze: 1. „Seien $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ beliebig gegeben. Dann gibt es für genügend großes n mindestens $(1 - \eta)n$ ε -normale natürliche Zahlen m mit $m < n$.“ — 2. „Seien $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ beliebig gegeben. Dann gibt es für genügend großes n unter den Quadraten m^2 der natürlichen Zahlen $m < n$ mindestens $(1 - \eta)n$ ε -normale.“

Mahler (Groningen).

Mahler, Kurt: Zur Approximation P -adischer Irrationalzahlen. Nieuw Arch. Wiskde 18, 22—34 (1934).

Ist ζ eine P -adische Irrationalzahl, so kann man analog dem reellen Fall den Kettenbruchalgorithmus aufstellen. Der Kettenbruch wird zwar konvergieren, aber man findet für die Annäherung der Näherungsbrüche an ζ zu unscharfe Abschätzungen. Verf. leitet eine andere Entwicklung her, indem er zuerst mit Hilfe des Minkowskischen Satzes über homogene (ternäre) Linearformen eine Folge von Brüchen $\frac{p_n}{q_n}$ ($n = 1, 2, 3 \dots$) konstruiert, die ζ sehr gut approximieren, während er dann den Kettenbruch aufstellt, dessen Näherungsbrüche diese $\frac{p_n}{q_n}$ sind. Es gelten dann die folgenden Eigenschaften:

$$a) \quad \zeta = \frac{a_0}{|b_0|} + \frac{a_1}{|b_1|} + \dots, \quad \text{wo} \quad a_n = \frac{e_n P^{\alpha_n}}{d_n}, \quad b_n = \frac{c_n}{P \cdot d_n} \quad (n = 0, 1, 2 \dots).$$

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_0}{|b_0|} + \dots + \frac{a_{n-1}}{|b_{n-1}|} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Es sind $\alpha_n \geq 0$, $c_n \neq 0$, $d_n \neq 0$, $e_n \neq 0$ alle ganz rational mit $|d_n| \leq 2\sqrt{P}$, $|e_n| \leq 2\sqrt{P}$, $|b_n| < 2\sqrt{P} \cdot |a_n|$, und es geht P nicht in d_n und e_n auf (für $P = 2$ kann man d_n und $e_n = \pm 1$ nehmen).

(b)
$$\frac{1}{2Q_n Q_{n+1}} \leq |p_n - q_n \zeta|_P \leq \frac{\sqrt{P}}{Q_n Q_{n+1}},$$
 wo $Q_n = \text{Max}(|p_n|, |q_n|)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) und wo $|u|_P =$ dem P -adischen Wert von u . c) Die Determinanten $\Delta_n = p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1} = (-1)^n a_0 a_1 \dots a_{n-1}$ aus zwei konsekutiven Näherungsbrüchen genügen den Bedingungen

$$1 \leq |\Delta_n| |\Delta_n|_P \leq 2\sqrt{P}. \quad (|\Delta_n| |\Delta_n|_P = 1 \text{ für } P = 2).$$

In der letzten Formel von S. 25 lese man q statt q^* . *J. F. Koksma* (Amsterdam).

Gelfond, A.: Sur quelques résultats nouveaux dans la théorie des nombres transcendants. C. R. Acad. Sci., Paris **199**, 259 (1934).

Verf. gibt (ohne Beweis) folgende neuen Transzendenzsätze: 1. „Sind $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ und $\beta_1 \neq 0, 1, \dots, \beta_m \neq 0, 1$ algebraische Zahlen und $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ wie auch $\ln \beta_1, \dots, \ln \beta_m$ linear unabhängig in bezug auf den Körper K der rationalen Zahlen, so sind $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_n}, \ln \beta_1, \dots, \ln \beta_m$ algebraisch unabhängig in bezug auf K .“ Hierin ist speziell die algebraische Unabhängigkeit von e und π enthalten. — 2. „Zahlen der Formen

$$\begin{array}{ccc} & & \omega_n \\ & & \cdot \\ & \omega_{n-1} e & \cdot \\ & \cdot & \cdot \\ & \omega_2 e & \cdot \\ & \cdot & \cdot \\ \omega_1 e & & \alpha_m \\ e & \text{und} & \alpha_2 \\ & & \alpha_1 \end{array}$$

mit algebraischen $\omega_1 \neq 0$, $\omega_2, \dots, \omega_n$ und $\alpha_1 \neq 0, 1$, $\alpha_2 \neq 0, 1$, $\alpha_3 \neq 0$, $\alpha_4, \dots, \alpha_m$ sind transzendent und mehrere solche Zahlen sind algebraisch unabhängig in bezug auf K , abgesehen von trivialen Ausnahmen.“ — Die Beweise sollen demnächst erscheinen. *Mahler* (Groningen).

Gruppentheorie.

Miller, G. A.: Distinct groups whose subgroups are simply isomorphic. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **20**, 430—433 (1934).

Lunn, A. C., and J. K. Senior: A method of determining all the solvable groups of given order and its application to the orders $16p$ and $32p$. Amer. J. Math. **56**, 319 bis 327 (1934).

Aus einem Satze von P. Hall [J. London Math. Soc. **3** 98 (1928)] folgt, daß eine auflösbare Gruppe G der Ordnung $g = x_1 x_2 \dots x_n$ — wobei die x_i Potenzen verschiedener Primzahlen p_i sind — genau eine Darstellung T_i als transitive Permutationsgruppe des Grades x_i besitzt. [Darstellungen, die durch Transformation mit einer Permutation auseinander hervorgehen, gelten als nicht verschieden.] Es gibt dann eine und nur eine getreue Darstellung von G als intransitive Permutationsgruppe des Grades $x_1 + x_2 + \dots + x_n$, bei der je x_i Variable unter sich permutiert werden, und zwar gemäß den Darstellungen T_i . Dieser Satz läßt sich umgekehrt dazu benutzen, alle auflösbaren Gruppen der Ordnung g aufzufinden; man suche dazu zunächst alle auflösbaren transitiven Permutationsgruppen der Grade x_i auf, deren Ordnung ein Teiler von g ist, und setze aus diesen auf alle möglichen Arten intransitive Permutationsgruppen der obengenannten Art zusammen. Für $g = 16p$ und $g = 32p$ wird das Verfahren vollständig durchgeführt und liefert eine systematische Übersicht über die Gruppen von diesen Ordnungen. *Magnus* (Frankfurt a. M.).

Senior, J. K., and A. C. Lunn: Determination of the groups of orders 101—161, admitting order 128. Amer. J. Math. **56**, 328—338 (1934).

Die im Titel genannten Gruppen werden vollständig untersucht; für Gruppen, deren Ordnung Produkt von höchstens vier Primzahlen ist, ist dies möglich mit Hilfe

einer allgemeinen Methode von O. Hölder [Math. Ann. **43**, 409 (1893)]. Für die Gruppen der Ordnungen 108, 120, 144 wird ein von den Autoren [Amer. J. Math. **56**, 319—327 (1934); vgl. vorst. Referat] begründetes Verfahren herangezogen. Es ergeben sich für diese Ordnungen resp. 45, 47, 197 nicht isomorphe Gruppen. Die ebenfalls nicht mit dem Hölderschen Verfahren zu behandelnden Gruppen der Ordnungen 112 und 160 wurden früher von den Verff. (s. l. c.) erledigt. *Magnus* (Frankfurt a. M.).

Kulakoff, A.: Sur le problème de Burnside. C. R. Acad. Sci., Paris **199**, 116—119 (1934).

Ist G eine Gruppe von ungerader Ordnung g , p ein Primteiler von g , $p - 1$ teilerfremd zu g , P ein Element der Ordnung p aus G , $\{P\}$ die von P erzeugte Untergruppe von G , h der Index ihres Normalisators, C_i die Klasse von P^i , und bestehen für $j \neq i$ [C_j ist die Klasse von P^j] und $i > 1$, $j > 1$ die Gleichungen $C_i C_j = h C_{(i+j-1)}$: wobei $i + j - 1$ modulo p zu nehmen ist, so kann G nicht einfach sein. Ein ähnliches Kriterium läßt sich auch für Gruppen von gerader Ordnung aussprechen; das oberr formulierte Kriterium hat eine Bedeutung für die Vermutung von Burnside, daß Gruppen ungerader Ordnung auflösbar sind. *Magnus* (Frankfurt a. M.).

Fitting, Hans: Über die direkten Produktzerlegungen einer Gruppe in direkt unzerlegbare Faktoren. Math. Z. **39**, 16—30 (1934).

1. Neuer Beweis des Krull-Schmidtschen Eindeutigkeitssatzes für Produktzerlegungen einer Gruppe (mit Operatoren) mit endlicher Hauptreihe. Der Beweis beruht auf den Sätzen des Autors über normale Automorphismen [Math. Ann. **107**, 514 bis 542 (1932); dies. Zbl. **5**, 386], insbesondere auf dem Satz: Wenn eine Summe von addierbaren normalen Automorphismen einer direkt-unzerlegbaren Gruppe eigentlich ist, so ist einer der Summanden eigentlich. (Dabei heißt ein Aut. normal, wenn er mit allen inneren Aut. vertauschbar ist, und eigentlich, wenn er einen inversen Aut. besitzt. Mehrere Aut. heißen addierbar, wenn sie die ganze Gruppe in solchen Untergruppen überführen, die elementweise miteinander vertauschbar sind.) Der Gedankengang des Beweises ist der folgende: Ist

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{S}_1 \times \cdots \times \mathfrak{S}_m = \mathfrak{R}_1 \times \cdots \times \mathfrak{R}_n$$

und sucht man zu jedem Element von \mathfrak{S}_1 die \mathfrak{R}_ν -Komponente und zu dieser wieder die \mathfrak{S}_1 -Komponente, so erhält man n addierbare normale Automorphismen von \mathfrak{S}_1 , deren Summe die Identität ist und unter denen somit ein eigentlicher vorkommen muß. Daraus schließt man, daß ein \mathfrak{R}_α zu \mathfrak{S}_1 isomorph ist und daß \mathfrak{S}_1 in der ersten Zerlegung durch \mathfrak{R}_α ersetzt werden kann. — 2. Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die absolute Eindeutigkeit der direkt-unzerlegbaren Faktoren \mathfrak{S}_ν angegeben. Notwendig und hinreichend ist, daß für $\nu \neq \mu$ keine homomorphen Abbildungen von \mathfrak{S}_ν auf eine von der Einheitsgruppe verschiedene Untergruppe des Zentrums von \mathfrak{S}_μ existieren. *van der Waerden* (Leipzig).

Littlewood, D. E., and A. R. Richardson: Group characters and algebra. Philos. Trans. Roy. Soc. London A **233**, 99—141 (1934).

Es wird eine Beziehung zwischen symmetrischen Funktionen und Charakteren der symmetrischen Gruppe \mathfrak{S}_n gelegt, welche es gestattet, sowohl Tafeln von symmetrischen Funktionen als Tafeln von Charakteren einfacher zu berechnen als bisher. Ausgangspunkt ist eine Verallgemeinerung des Determinantenbegriffs. Ist A eine Matrix P_S dasjenige Produkt von Matricelementen, das aus dem Diagonalterm durch die Permutation S der zweiten Indizes entsteht, $\chi^{(\lambda)}$ der zu einer Partitio $n = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$ gehörige Charakter der \mathfrak{S}_n , so heißt

$$|A|^{(\lambda)} = \sum_S \chi^{(\lambda)}(S^{-1}) P_S$$

die zur Partitio gehörige Immanente der Matrix A . Spezialfälle sind die Permanente (Partitio $n = n$) und die Determinante (Partitio 1^n). — Wenn alle Charaktere der Gruppen $\mathfrak{S}_{n-\lambda_i}$ schon bekannt sind, wird ein zusammengesetzter Charakter der \mathfrak{S}_n gefunden: Jede Permutation S definiert eine lineare Transformation der Symbol

x_1, \dots, x_n , deren Matrix A_S sei. Die Summe der zur Partitio $n - \lambda_1 = \lambda_2 + \dots + \lambda_p$ gehörigen Immanenten der $(n - \lambda_1)$ -reihigen Diagonaluntermatrizes von A_S ist ein zus. Char. von \mathfrak{S}_n , der den Char. $\chi^{(\lambda)}$ einmal und sonst nur Char. mit größerem λ_1 als Bestandteile enthält. Durch Ausreduzieren dieses zus. Char. mit Hilfe der Orthogonalität erhält man $\chi^{(\lambda)}$. — Zu jeder Partitio gehört eine S -Funktion $\{\lambda_1, \dots, \lambda_\mu\}$, welche zunächst definiert wird als Immanente einer aus den Funktionen $S_r = x_1^r + \dots + x_m^r$ gebildeten Matrix, sodann aber einfacher durch die Formel

$$n! \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} = \sum_{\varrho} \chi_{\varrho}^{(\lambda)} h_{\varrho} S_{\varrho}, \quad (1)$$

wo h_{ϱ} die Anzahl der Permutationen aus α_1 Zykeln der Länge 1, α_2 Zykeln der Länge 2, usw., $\chi_{\varrho}^{(\lambda)}$ der Charakter dieser Klasse und

$$S_{\varrho} = S_1^{\alpha_1} S_2^{\alpha_2} \dots S_q^{\alpha_q} = \sum_{(\lambda)} \chi_{\varrho}^{(\lambda)} \cdot \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} \quad (2)$$

ist. Nach Schur können die S -Funktionen auch als Determinanten aus den elementarsymm. Funkt. a_ν oder aus den Wronskischen Alephs h_ν (z. B. ist $a_n = \{1^n\}$ und $h_n = \{n\}$), sowie auch als Quotienten von m -reihigen Determinanten:

$$\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} = |x_i^{l_i+n-t}| : |x_i^{n-t}|$$

geschrieben werden. Für $m < p$ ist $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} = 0$; für $m \geq n$ sind alle S -Funktionen vom Gewichte n linear-unabhängig. Es wird gezeigt, daß die Tafeln von Kostka, welche die S -Funktionen durch die a_ν oder durch die Funktionen $\sum x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_m^{\beta_m}$ und umgekehrt ausdrücken, sehr leicht aus Charakterentafeln erhalten werden können. — Jeder S -Funktion (oder jedem Charakter) ist ein primitives Idempotent des Zentrums des Gruppenrings von \mathfrak{S}_n zugeordnet, und dem Produkt zweier S -Funktionen entspricht das Produkt der Idempotenten der Gruppenringe von $\mathfrak{S}_{n'}$ und $\mathfrak{S}_{n''}$ im Gruppenring von $\mathfrak{S}_{n'+n''}$. Es wird eine Regel angegeben, welche es gestattet, ein Produkt von zwei S -Funktionen wieder durch S -Funktionen auszudrücken:

$$\{\lambda_1 \lambda_2 \dots\} \cdot \{\mu_1 \mu_2 \dots\} = \{\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \dots\} + \{\dots\} + \dots \quad (3)$$

Insbesondere hat man für $n'' = 1$ die einfache Regel

$$\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} \cdot S_1 = \{\lambda_1 + 1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\} + \{\lambda_1, \lambda_2 + 1, \dots, \lambda_p\} + \dots + \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p + 1\},$$

welche zusammen mit (2) eine sehr einfache Berechnung der Charaktere der meisten Klassen gestattet. — Aus der Produktformel (3) erhält man Formeln für Immanenten, indem man auf der rechten Seite die S -Funktionen durch die zu ihren Partitionen gehörigen Immanenten einer Matrix A und auf der linken Seite das Produkt durch die Summe über alle Produkte von zu den Partitionen $\{\lambda_1 \lambda_2 \dots\}$ und $\{\mu_1 \mu_2 \dots\}$ gehörigen Immanenten komplementärer Diagonaluntermatrizes von A ersetzt. — Den Schluß bilden Tafeln der Charaktere der \mathfrak{S}_n für alle $n \leq 9$. v. d. Waerden.

Birkhoff, Garrett: Hausdorff groupoids. Ann. of Math., II. s. 35, 351—360 (1934).

The $(1 \rightarrow 1)$ -transformations of an arbitrary set \mathfrak{H} form a groupoid $\mathfrak{G}(\mathfrak{H})$ in the sense of W. Specht, Eine Verallgemeinerung der Permutationsgruppen. Math. Z. 37 321—341 (1933); this Zbl. 7, 149 (not in the sense of H. Brandt). If especially \mathfrak{H} is a Hausdorff space, neighborhoods N_α of any fixed $(1 \rightarrow 1)$ -transformation α of \mathfrak{H} in itself are defined by the author as the sets of those transformations τ carrying preassigned finite sets x_1, \dots, x_n ($x_i \in \mathfrak{H}$) into preassigned neighborhoods $V_{\alpha(x_1)}, \dots, V_{\alpha(x_n)}$ of $\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n)$. Then $\mathfrak{G}(\mathfrak{H})$ is itself a Hausdorff space, which is a topological invariant, associated with \mathfrak{H} . If \mathfrak{H} consists of isolated points, $\mathfrak{G}(\mathfrak{H})$ is a Hausdorff groupoid, i. e. from $\sigma \in N_\alpha, \tau \in N_\beta$ follows $\sigma \tau \in N_{\alpha\beta}$. If moreover \mathfrak{H} is enumerable, $\mathfrak{G}(\mathfrak{H})$ is a linear set. Each complete group of permutations of an enumerable set \mathfrak{H} , such that each system of transitivity is finite is homeomorphic with the Cantor set of dimension zero, hence a metrical group. In such a group \mathfrak{S} and in its subsets a regular Caratheodory massfunction can be constructed, which makes \mathfrak{S} measurable and of measure 1. [This measure was already introduced by the ref.: D. van Dantzig,

Einige Sätze über topologische Gruppen. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 41, 42—44 (1932).] The paper concludes with some remarks on fields of complex numbers.

D. van Dantzig (Delft).

Mengenlehre und reelle Funktionen.

Kniehal, Vladimír: Dyadische Entwicklungen und Hausdorffsches Maß. Mém. Soc. Roy. sci. Bohême 1933, Nr 14, 1—18 (1934).

Wenn man jede Zahl θ mit $0 \leq \theta < 1$ in einen dyadischen Bruch $0, i_1 i_2 i_3 \dots i_n \dots$ entwickelt, welche unendlich viele Nullen enthält, und wenn $p(\theta, n)$ die Anzahl der Nullen in dem System i_1, i_2, \dots, i_n angibt, so hat für jedes r mit $0 < r < 1/2$ die Menge N_r derjenigen Zahlen θ , für deren jede die Ungleichung $p(\theta, n) < r \cdot n$ unendlich viele ganzzahlige, positive Lösungen in n hat, das Lebesguesche Maß Null. Der Autor behandelt einige Eigenschaften des Hausdorffschen Maßes [cf. Hausdorff, Math. Ann. 79, 157—179 (1918)] und zeigt sodann, daß die Hausdorffsche Dimensionszahl von N_r gleich $-\frac{r \log r + (1-r) \log(1-r)}{\log 2}$ ist.

J. Ridder (Groningen).

Stephens, Rothwell: Continuous transformations of finite spaces. Tôhoku Math. J. 39, 98—106 (1934).

The following problem is considered. Given a finite space P and eight fundamental properties of P formulated by Fréchet, what possible combinations of these properties can occur in the biunivocal continuous transforms of the space P ? The article is based on the article, Continuous transformations of abstract spaces, by the same author (this Zbl. 4, 225) and on, The complete existential theory of eight fundamental properties of topological spaces, Dorothy McCoy, Tôhoku Math. J. 33, 89—116. The problem is completely solved for a number of combinations of the eight properties.

E. W. Chittenden (Iowa City).

Sierpiński, W.: Résumé de la communication de M. Nicolas Lusin: „Sur les classes des constituantes des complémentaires analytiques“. Prace mat. fiz. 41, 21—23 (1934).

L'auteur donne un résumé simplifié d'une note de Lusin, Ann. Scuola norma. super. Pisa, II. s. 2, 269—282 (1933); ce Zbl. 7, 57.

J. Ridder (Groningen).

Sierpiński, W.: Sur l'existence des suites translinies décroissantes d'ensembles F_σ . C. R. Soc. Sci. Varsovie 26, 85—89 (1934).

There exists a system of linear perfect sets (non-null) P_n^α , where α traverses the ordinal numbers $< \Omega$ and n is a positive integer, such that if we set

$$E^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^\alpha \quad \text{for } \alpha < \Omega$$

we have

$$E^\beta \subset E^\alpha \quad \text{and} \quad E^\beta \neq E^\alpha \quad \text{for } \alpha < \beta < \Omega$$

and for $\alpha < \beta < \Omega$ every integer m and interval d which contains in its interior points of P_m^α there is an integer n (dependent on α, β, m and d), such that $P_n^\beta \subset dP_m^\alpha$. The demonstration does not utilize the theory of measure.

E. W. Chittenden (Jawa).

Sierpiński, W.: Sur la dualité entre la première catégorie et la mesure nulle. Fundam. Math. 22, 276—280 (1934).

Under the hypothesis of the continuum, there exists a biunivocal transformation $f(x)$ of the set X of all real numbers into itself such that if E is a subset of X of the first category, $f(E)$ is of measure null, and if E is of measure null, $f^{-1}(E)$ is of the first category.

E. W. Chittenden (Iowa City).

Kuratowski, Casimir: Sur le rapport des ensembles de M. Lusin à la théorie générale des ensembles. Fundam. Math. 22, 315—318 (1934).

Let S be a family of finite sequences of positive integers. It is complete if for any set of positive integers m_1, \dots, m_k (belonging to S or not), there is in S a set $m_1, \dots, m_k, m_{k+1}, \dots, m_l$, where $l \geq k$. If z is an irrational number of the interval $01,$

designate by $\frac{1}{|z^1|} + \frac{1}{|z^2|} + \frac{1}{|z^3|} \dots$ its development in a continued fraction. Let N_k^i be the set of numbers z such that $z^i = k$, and let N be the set of all numbers z . Then if G is open in N and S denotes the family of sequences n_1, \dots, n_k such that $N_{n_1}^1 \dots N_{n_k}^k \subset G$, the necessary and sufficient condition that the set G be dense in N is that the system S be complete. The principal result of the article follows. The existence of a set L of the power c of the continuum such that each subset which is non-dense in L is enumerable is equivalent to the existence of a set E of power c and a double sequence of sets A_k^i such that $E = A_1^1 + A_2^2 + \dots$, for every i , $A_k^i A_i^k = 0$ for $k \neq 1$, for each complete family S , $E - \sum A_{n_1}^1 \dots A_{n_k}^k \leq N_0$, the summation being extended to the systems n_1, \dots, n_k , belonging to S . *E. W. Chittenden (Iowa City).*

Kuratowski, C., et T. Posament: Sur l'isomorphie algèbro-logique et les ensembles relativement boreliens. *Fundam. Math.* **22**, 281—286 (1934).

A family C of subsets X of a space \mathcal{X} is called an algebro-logical corps if it contains the complement $\mathcal{X} - X$ of every set X and the sum of every pair of its sets. A set function $F(X)$ is called an algebro-logical isomorphism if it satisfies the conditions: $F(\mathcal{X}) = \mathcal{Y}$; $F(X_1 - X_2) = F(X_1) - F(X_2)$; $F(X) = 0$ implies $X = 0$. The justification of the term lies in the fact that every relation between the sets of C expressed in terms of the algebra of logic is invariant when the sets X are replaced by $F(X)$. If the domain of definition D of $F(X)$ is not a corps, but the function $F(X)$ may be prolonged to the minimal algebro-logical corps containing D to an isomorphism, and if $F(\mathcal{X}) = \mathcal{Y}$, then $F(X)$ is unique. Let $\mathcal{X} = X_1^k + X_2^k + \dots$, $k = 1, 2, \dots$, be a sequence of decompositions of \mathcal{X} in disjointed sets. Let $X_{i_1 \dots i_k} = X_{i_1}^{k_1} \dots X_{i_k}^{k_k}$. Let \mathcal{Y} admit a similar sequence of decompositions such that $X_{i_1 \dots i_k} = 0$ is equivalent to $Y_{i_1 \dots i_k} = 0$. The function $F(X) = Y$ is an algebro-logical isomorphism. Given a metric space, an arbitrary subset \mathcal{X} of that space, and a sequence X^1, X^2, \dots of sets which are ambiguous of class α relative to \mathcal{X} , there corresponds to X a set $Y = F(X)$ of multiplicative class $\alpha + 1$ (that is of type $G_\delta, F_{\sigma\delta}$, etc.) and sets $F(X^k)$ ambiguous of class α relative to \mathcal{Y} , such that the function $F(X)$ is an algebro-logical isomorphism and $X = \mathcal{X} F(X)$. Moreover, if \mathcal{X} is multiplicative of class $\alpha > 0$, the set \mathcal{Y} coincides with the entire space. *E. W. Chittenden (Iowa City).*

Posament, T.: Sur quelques propriétés des fonctions d'ensembles. *C. R. Soc. Sci. Varsovie* **26**, 89—93 (1934).

Let $F(X)$ be a function on the subsets of a class P with subsets of G for values. The following properties are considered. $a_0 \cdot X \subset Y$ implies $F(X) \subset F(Y)$.

$$\begin{array}{ll} a_1 \cdot F(X + Y) \subset F(X) + F(Y) & a_2 \cdot F(X + Y) \supset F(X) + F(Y) \\ m_1 \cdot F(XY) \subset F(X) F(Y) & m_2 \cdot F(XY) \supset F(X) F(Y) \\ s_1 \cdot F(X - Y) \subset F(X) - F(Y) & s_2 \cdot F(X - Y) \supset F(X) - F(Y) \\ p_1 \cdot F(0) = 0 & p_2 \cdot XY = 0 \text{ implies } F(X) F(Y) = 0 \\ m_d \cdot F\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right) \subset \sum_{n=1}^{\infty} F(X_n) & m_a \cdot F\left(\prod_{n=1}^{\infty} X_n\right) \supset \prod_{n=1}^{\infty} F(X_n) \end{array}$$

Let (p) denote the class of all functions with the property p . The following list of relations between the properties $a_0 - s_2$ is complete.

$a_0 = (a_2) = (m_1)$. $(s_1) \subset (a_0)$. $(a_1) + (a_2) \subset (s_2)$. $(a_0)(s_2) \subset (a_1)$. $(s_1) + (s_2) \subset (m_1)(m_2)$. Thus every function subtractive (s) is multiplicative (m) and also additive (a) . We have in addition, $(a)(p_2) = (s) = (a)(m)(p_1)$. And, $(a)(m)(a_d) = (a)(m)(m_d)$. There are seven combinations of these properties and their negatives whose existence or non-existence remains undetermined. *E. W. Chittenden (Iowa City).*

Olewski, B.: Contribution à l'étude des transformations de la définition d'ensemble mesurable B. *C. R. Soc. Sci. Varsovie* **26**, 58—67 (1934).

Dans le livre de Lusin: Leçons sur les ensembles analytiques (1930), 43—45 on trouve une démonstration du théorème: tout ensemble qu'on obtient, à partir des

intervalles, au moyen de deux opérations: somme au sens large (S) et partie commune (P) indéfiniment répétées est mesurable B (c.-à-d. un tel ensemble peut aussi être obtenu, à partir des intervalles, au moyen des opérations: somme stricte (S') et complémentaire (C)). Cette démonstration n'est pas directe, puisqu'elle repose sur l'induction transfinie. L'auteur de cette note donne une démonstration directe; il déduit de la suite dénombrable bien ordonnée

$$E_0, E_1, E_2, \dots, E_\alpha, \dots / E \quad (1)$$

qui sert à construire, à partir des intervalles, l'ensemble E au moyen de (S) et (P) une autre suite dénombrable

$$\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_\beta, \dots / E$$

qui sert à construire E , à partir des intervalles, au moyen de (S') et (C). L'auteur emploie pour cela l'énumération de (1) au moyen des entiers positifs. *J. Ridder.*

Lévy, Paul: Sur quelques problèmes relatifs à la théorie de la croissance et sur une hypothèse de M. R. G. Schwarz. *J. École polytechn., II. s. cahier 32*, 211—225 (1934)

S sera le groupe des opérateurs $\{F\}$ transformant x en $f(x)$, où chaque fonction $f(x)$ est bien définie pour x assez grand, continue, toujours croissante et devenant infinie avec x tandis que $\log \frac{f(x)}{x}$ reste borné pour x infini. Pour

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{et} \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = M$$

l'intervalle d'oscillation $\Omega[f(x)]$ sera l'intervalle fermé (m, M) . L'auteur s'est posé la question: est il possible de définir pour chaque opérateur F une mesure μF qui appartient toujours à l'intervalle $\Omega[f]$ (cond. a) et qui vérifie: $\mu(FG) = \mu F \cdot \mu G$ (cond. b). La réponse est négative. Une hypothèse, introduite par R. Schwarz, *J. École polytechn., II. s. cahier 31*, 141—145 (1933); ce *Zbl.* 8, 249, se montre seulement exacte dans certains sous-groupes; en outre quoiqu'il est possible de définir pour les F de ces groupes μF de manière à vérifier les conditions (a) et (b), μF n'est pas uniquement déterminé par ces conditions. *J. Ridder (Groningen).*

● **De la Vallée Poussin, C.:** Intégrales de Lebesgue. 2. edit. Paris: Gauthier-Villars 1934. XII, 194 S. Frs. 35.—

Natanson, I.: Note sur les intégrales singulières. *Ann. Inst. Ing. Bâtiments Industr., Leningrad H. 1*, 73—80 u. franz. Zusammenfassung 80 (1934) [Russisch].

This paper contains a modified proof of a theorem proved in earlier paper (this *Zbl.* 44 203) by the author, to the effect that there exists no singular integral $\int_b^x \Phi_n(x, t) f(t) dt$ which represents an arbitrary summable function $f(x)$ at all its points of approximate continuity. The author also gives an example of a singular integral which represents a bounded measurable function at all points of its approximate continuity, but not at the points of the Lebesgue set associated with the function. *J. D. Tamarkin.*

Natanson, I.: Démonstration nouvelle du théorème de M. Vitali. *Ann. Inst. Ing. Bâtiments Industr., Leningrad H. 1*, 81—83 u. franz. Zusammenfassung 84 (1934) [Russisch].

This paper contains a „simplified“ proof of a theorem of Vitali that every measurable function is equal almost everywhere to a Baire function of class ≤ 2 .

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.)

Ridder, J.: Das Riemann-Stieltjesche Integral. *Prace mat. fiz.* 41, 65—95 (1933)

Der Verf. verallgemeinert die übliche Definition des Stieltjeschen Integrals einer beschränkten Funktion $f(x)$ in bezug auf eine Funktion $\alpha(x)$ beschränkter Variation, indem er jeden Unstetigkeitspunkt der Funktion $\alpha(x)$ als einen Doppelpunkt $x + 0$, $x - 0$ mit Werten $\alpha(x + 0)$, $\alpha(x - 0)$ betrachtet, eine ε -Zerlegung des Intervalls $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b$ dadurch definiert, daß entweder

x_k, x_{k+1} ein Doppelpunkt mit $V(x+0) - V(x-0) > \varepsilon$ ist, oder $V(x_{k+1}) - V(x_k) \leq \varepsilon$, $V(x) = \text{Variation von } \alpha(x)$, und $\int f d\alpha$ als

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n f(\xi_k) (\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)), \quad x_k \leq \xi_k \leq x_{k+1}$$

definiert. Es zeigt sich, daß dadurch die Beschränkung im Falle des gewöhnlichen Stieltjesschen Integrals, daß f und α keine gemeinsamen Unstetigkeiten besitzen, aufgehoben wird. Die zu erwartenden Eigenschaften dieses Integrals werden bewiesen. Ein einfacher partieller Integrationssatz fehlt jedoch in dieser Verallgemeinerung. Durch Einführung eines geeigneten Jordanschen Flächen- und Linearenmaßes werden einerseits eine geometrische und andererseits eine Lebesguesche Definition des Integrals aufgestellt. Den Schluß bildet eine Verallgemeinerung des Osgoodschen Satzes über die Konvergenz einer Folge von Integralen $\int f_n d\alpha$, f_n konvergent und gleichmäßig beschränkt. — Ref. möchte bemerken, daß die Sätze des ersten Teils dieser Arbeit unmittelbar daraus folgen, daß man die besprochene Verallgemeinerung auch dadurch erhalten kann, indem man α in seinen stetigen Teil $\gamma(x)$ und seinen Unstetigkeitsteil zerlegt und $\int f d\alpha = \int f d\gamma + \sum f(x_i) (\alpha(x_i+0) - \alpha(x_i-0))$ setzt, wo $\int f d\gamma$ wie üblich definiert ist und x_i die Unstetigkeitsstellen von α sind. *Hiltebrandt.*

Krzyżański, Mirosław: Sur la dérivation de l'intégrale par rapport au paramètre. C. R. Soc. Sci. Varsovie 26, 96—104 (1934).

$f(x, y)$ est dite à variation bornée $(T)y$ dans un rectangle $R(a, c; b, d)$ si sa variation absolue $V_y(x)$ sur les segments parallèles à l'axe des y est une fonction sommable de x . Soit $s(x, y)$ la fonction des singularités de $f(x, y)$ comme fonction de y ; la fonction l'ensemble $S(x, e)$ correspondant à $s(x, y)$ est nommée uniformément singulière dans (a, b) si chaque ensemble E mesurable (B) dans (c, d) contient un ensemble Q mesurable (B) de mesure nulle tel que pour tout $e \subset E - Q$ $S(x, e) = 0$ pour une pleine épaisseur des x . Le but principal de l'auteur était de démontrer le théorème: Soit $f(x, y)$ à variation bornée $(T)y$ dans $R(a, c; b, d)$. Pour que l'on ait presque partout dans (c, d) :

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx = \int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) dx$$

quelque soit l'intervalle (a_1, b_1) contenu dans (a, b) , il faut et il suffit que $S(x, e)$ soit uniformément singulière dans (a, b) . *J. Ridder* (Groningen).

Krzyżański, Mirosław: Sur les fonctions absolument continues généralisées de deux variables. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 2058—2060 (1934).

Définitions: 1. Une fonction continue de rectangle $F(R)$ est absolument continue sur l'ensemble fermé plan E , si pour tout ε positif on peut déterminer $\eta > 0$ tel que $\sum_{(i)} |R_i| < \eta$ entraîne $\sum_{(i)} |F(R_i)| < \varepsilon$ pour chaque système fini de rectangles non empiétant, contenant des points de E et contenus dans le plus petit rectangle R_E bornant E ; 2. $F(R)$ admet un accroissement défini sur E , si l'on peut attribuer à chaque ensemble fermé $E' \subset E$ un nombre $A_{E'}$ tel que l'inégalité $|\sum_{(i)} R_i - E'| < \eta$ avec η suffisamment petit entraîne $|\sum_{(i)} F(R_i) - A_{E'}| < \varepsilon$, pour tout système de rectangles

R_i qui n'empiètent pas, couvrent E' et sont contenus dans $R_{E'}$; 3. $F(R)$ est absolument continue généralisée dans un rectangle R_0 quand R_0 est la somme d'ensembles sur lesquels $F(R)$ est absolument continue et admet un accroissement défini; 4. une fonction $f(x, y)$ possède une totale $F(R_0)$ dans le rectangle R_0 quand $f(x, y)$ est égale à la dérivée au sens de Banach [cf. Fundam. Math. 6, 170 (1924)] de la fonction $F(R)$ absolument continue généralisée, presque partout dans R_0 où cette dérivée existe. La note contient en outre une définition équivalente de la totale qui repose sur l'emploi de fonctions majorantes et minorantes. Toute dérivée finie au sens de Looman [cf. Fundam. Math. 4, 246 (1923)] d'une fonction $F(x, y)$ possède une totale. *J. Ridder.*

Kempisty, Stefan: Sur la totalisation des fonctions de deux variables. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 2060—2062 (1934).

Cette note contient une modification de la définition de la totale donnée par Kryzański, qui permet d'intégrer toute fonction finie

$$f(x, y) = \lim_{h, k \rightarrow 0} \frac{F(a+h, b+k) - F(a+h, b) - F(a, b+k) + F(a, b)}{hk}$$

avec

$$0 < \alpha \leq \left| \frac{h}{k} \right| \leq \frac{1}{\alpha}, \quad a \leq x \leq a+h, \quad b \leq y \leq b+k.$$

L'intégrale de Perron-Bauer pour les fonctions de deux variables donne un cas spécial de cette nouvelle intégration. J. Ridder (Groningen).

Riesz, Frédéric: Sur les points de densité au sens fort. Fundam. Math. 22, 221—225 (1934).

Dans son livre: Leçons sur l'intégration (Varsovie 1933) M. Saks déduit d'un théorème de M. Stepanoff sur les différentielles approximatives le théorème: "Presque tous les points d'un ensemble plan E en sont des points de densité au sens fort, c.-à-d. dans un tel point la densité moyenne de E par rapport à un rectangle R_n parallèle aux axes (mesure extérieure de E : R_n divisée par l'aire de R_n), comprenant le point et dont les diagonales tendent vers zéro avec $1/n$, a toujours pour limite l'unité." Cette note contient une démonstration entièrement élémentaire, immédiatement applicable dans un espace à n dimensions. Pour des généralisations de ce théorème voir Busemann et e. Feller, Fundam. Math. 22, 226—256 (1934); ce Zbl. 9, 106. J. Ridder.

Whitney, Hassler: Differentiable functions defined in closed sets. I. Trans. Amer. Math. Soc. 36, 369—387 (1934).

Using the methods of an earlier article (Trans. Amer. Math. Soc. 36, 63—89) this Zbl. 8, 249) the author gives necessary and sufficient conditions that a function $f(x)$ defined on a closed linear set A be of class C^m in A . This furnishes a direct definition of the derivative of a function on A . The former definition involved the existence of certain auxiliary functions. Taylor's formula for $f(x)$ may hold to the m -th order on certain closed sets if $f(x)$ is not of class C^m . A closed set A has the property Z_ρ at the point $x(\rho > 0)$ if there is an $\eta > 0$ such that corresponding to any two points x_0 and x_1 of A within η of x , points x_2, \dots, x_3 of A can be found such that

$$\frac{1}{\rho} < \left| \frac{x_i - x_j}{x_1 - x_0} \right| < \rho \quad (i, j = 0, \dots, q; i \neq j)$$

then $\eta_{ij}/r_{kl} < \rho^2$ for $i \neq j, k \neq l$. This condition is satisfied by the Cantor discontinuum. A necessary and sufficient condition that $f(x)$ be of class C^m in terms of a set of $m+1$ functions, of which the first is $f(x)$, is obtained in case A has the property Z_ρ . If $m=2$ the theorem holds for all closed sets. An example is given showing that the condition does not hold in general if $m>2$. E. W. Chittenden (Iowa City).

Analysis.

Differentialgleichungen :

Chiellini, Armando: Una proprietà caratteristica delle equazioni differenziali lineari autoaggiunte del terzo ordine. Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari 4, 8—11 (1934).

Una forma quadratica di soluzioni dell'equazione differenziale $y''' = p_1 y'' + p_2 y' + p_3 y$ soddisfa (in generale) ad una equazione differenziale lineare del sesto ordine. Condizione necessaria e sufficiente, affinché soddisfi ad una di ordine minore, è che l'equazione di partenza sia autoaggiunta. Autoreferat.

Inaba, Eizi: Über Maximal- und Minimallösung der Differentialgleichungen

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Jap. J. Math. 10, 169—176 (1934).

Für die Existenz einer Maximal- und Minimallösung (Perron) der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ wird ein neuer Beweis gegeben, d. h. es wird bewiesen: „Die

Funktion $f(x, y)$ sei stetig im Gebiet B , das durch $x_0 \leq x \leq X$ und $\omega_1(x) \leq y \leq \omega_2(x)$ gegeben ist; $\omega_1(x)$ und $\omega_2(x)$ seien in $x_0 \leq x \leq X$ stetig und mit vorderen Differentialquotienten versehen; $\omega_1(x_0) = \omega_2(x_0) = y_0$ und $D_+ \omega_1(x) \leq f(x, \omega_1(x))$, $D_+ \omega_2(x) \geq f(x, \omega_2(x))$. Dann besitzt die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ zwei eindeutig bestimmte Lösungen $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ (Maximallösung und Minimallösung), die in B liegen, durch den Punkt $P_0(x_0, y_0)$ gehen und mit denen für jede andere durch P_0 gehende Lösung $y(x)$ aus B gilt $\Psi(x) \leq y(x) \leq \Phi(x)$. Beweis: Es sei M eine positive obere Schranke für $|f(x, y)|$ in B und ε_r eine Folge positiver Zahlen mit

$$M > \varepsilon_1 \geq 2\varepsilon_2 \geq 2^2\varepsilon_3 \geq \dots \geq 2^{n-1}\varepsilon_n \geq \dots$$

Durch $x_i^{(v)}$ mit

$$x_0 = x_1^{(v)} < x_2^{(v)} < \dots < x_{n_v-1}^{(v)} < x_{n_v}^{(v)} = X$$

sei eine Intervalleinteilung gegeben. Ferner werde gesetzt: $F(x, y) = f(x, y)$ in B und $F(x, y) = f(x, \omega_1(x))$ für $y \leq \omega_1(x)$ und $F(x, y) = f(x, \omega_2(x))$ für $y \geq \omega_2(x)$. In $x_0 \leq x \leq X$ wird $\varphi_v(x)$ und $\psi_v(x)$ erklärt durch: $\varphi_v(x_0) = y_0 = \psi_v(x_0) = z_0$; für $x_0 \leq x \leq x_1^{(v)}$:

$$\begin{aligned} \varphi_v(x) &= y_0 + \{F(x_0, y_0) + \varepsilon_v\}(x - x_0), & \varphi_v(x_1^{(v)}) &= y_1^{(v)}, \\ \psi_v(x) &= z_0 + \{F(x_0, y_0) - \varepsilon_v\}(x - x_0), & \psi_v(x_1^{(v)}) &= z_1^{(v)} \end{aligned}$$

und allgemein für $x_i^{(v)} \leq x \leq x_{i+1}^{(v)}$ ($i = 1, 2, \dots, n_v - 1$):

$$\begin{aligned} \varphi_v(x) &= y_i^{(v)} + \{F(x_i^{(v)}, y_i^{(v)}) + \varepsilon_v\}(x - x_i^{(v)}), & \varphi_v(x_{i+1}^{(v)}) &= y_{i+1}^{(v)}, \\ \psi_v(x) &= z_i^{(v)} + \{F(x_i^{(v)}, z_i^{(v)}) - \varepsilon_v\}(x - x_i^{(v)}), & \psi_v(x_{i+1}^{(v)}) &= z_{i+1}^{(v)}. \end{aligned}$$

Die $\varphi_v(x)$ bzw. $\psi_v(x)$ streben monoton gegen $\Phi(x)$ bzw. $\Psi(x)$, von denen die behaupteten Eigenschaften nachgewiesen werden. Es folgen eine Reihe hinreichender Bedingungen für die eindeutige bzw. nicht-eindeutige Lösbarkeit des gestellten Anfangswertproblems in speziellen Fällen. *Rellich* (Göttingen).

Digel, E.: Zu einem Beispiel von Nagumo und Fukuhara. *Math. Z.* **39**, 157—160 (1934).

Es sei \mathfrak{R} die Menge aller Punkte, welche auf, von $P_0 = (x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$ ausgehenden Integralkurven \mathfrak{J} des Systems $\frac{dy_v}{dx} = f_v(x, y_1, \dots, y_n)$ liegen ($v = 1, \dots, n$); \mathfrak{R} stetig in allen Variablen und beschränkt für $0 \leq x - x_0 \leq a$, $-\infty < y_v < +\infty$. Ist dann $\Pi = (\xi, \eta_1, \dots, \eta_n)$ ein Randpunkt von \mathfrak{R} und ist $x_0 < \xi$, so geht durch Π eine von P_0 auslaufende \mathfrak{J} , welche für $x_0 \leq x \leq \xi$ ganz dem Rande von \mathfrak{R} angehört; hingegen verläuft \mathfrak{J} für $x > \xi$ im allgemeinen nicht mehr durchaus auf dem Rande von \mathfrak{R} . Verf. belegt diese letzte Behauptung durch ein neues Beispiel, bei welchem sich der analytische Nachweis wesentlich einfacher gestaltet als bei den bisher bekannten. *Haupt* (Erlangen).

Levin, V.: Eine Bemerkung über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung. *Über. Deutsch. Math.-Vereinig.* **44**, 48—50 (1934).

Es wird bewiesen: „Sei $f(u_1, u_2, u_3, u_4)$ eine dreimal stetige differentierbare Funktion ihrer Argumente, $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ willkürliche zweimal stetig differentierbare Funktionen. Wenn $z = f(x, y, \varphi(x), \psi(y))$ das allgemeine Integral einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, so gibt es eine zweimal stetig differentierbare Funktion $F(v_1, v_2, v_3)$, so daß diese Differentialgleichung in der Form $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y, z) = 0$ beschrieben werden kann.“ *Rellich* (Göttingen).

Soboleff, S.: Funktional-invariante Lösungen der Wellengleichung. *Trav. Inst. phys.-math. Stekloff* **5**, 259—264 (1934) [Russisch].

In ihren Arbeiten über die elastischen Schwingungen einer Halbebene (dies. Zbl. **4**, 79; **7**, 277) haben der Verf. und Prof. W. Smirnow eine Klasse von funktional-invarianten Lösungen $\Omega(x, y, t)$ der Wellengleichung aufgebaut. Jede (in genügender Weise) differentierbare Funktion $f(\Omega)$ ist auch eine Lösung der Wellengleichung;

die Funktionen Ω sind aus der Hilfsgleichung

$$l(\Omega) t + m(\Omega) x + n(\Omega) y - k(\Omega) = 0 \quad (*)$$

zu finden, wobei l, m, n solche analytische Funktionen sind, für welche

$$l^2(\Omega) = a^2 \{m^2(\Omega) + n^2(\Omega)\}$$

ist. In der referierten Arbeit zeigt der Verf., daß jede zweimal stetig differentierbar funktionalinvariante Lösung der Wellengleichung aus der Gleichung (*) ermittelt werden kann. Janczewski (Leningrad).

Soboleff, S.: Zur Frage über die analytischen Lösungen eines Systems von partiellen Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen. Trav. Inst. phys.-math. Stekloff 5, 265—282 (1934) [Russisch].

Diese Arbeit ist eine Erweiterung einer früheren Arbeit des Verf. (s. dies. Zbl. 49, 112), in welcher genügende Bedingungen für die Auflösung (in der Form einer Taylorschen Reihe) eines allgemeinen Systems von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen nebst Anfangsbedingungen (s. loc. cit.) aufgestellt waren. Jetzt findet der Verf. neue genügende Bedingungen für die Auflösung desselben Problems, die im wesentlichen mit den früheren äquivalent sind, aber enger als die früheren mit den Charakteristiken des Systems zusammenhängen. Es werden hier geeignete lineare Transformationen der abhängigen Veränderlichen ausgeführt und einige wichtige Eigenschaften der Koeffizientendeterminanten der erhaltenen Systeme festgestellt. Janczewski (Leningrad).

Nicolesco, Miron: Deux remarques sur l'unicité de la solution du problème de Dirichlet pour les équations différentielles linéaires du second ordre. Bull. Sci. math. II. s. 58, 207—211 (1934).

Ces remarques concernent des résultats de M. Picard, que l'aut. étend à l'équation à n variables $\Delta u + \sum_i A_i \partial u / \partial x_i + Cu = 0$. La première remarque concerne le cas où $\sum A_i dx_i$ est une différentielle totale; un changement d'inconnue ramène alors l'équation donnée au type $\Delta U + hU = 0$ (cette conclusion est exacte, quoiqu'une erreur se soit glissée dans les calculs de l'aut.); si alors h est partout négatif ou nul, le problème de Dirichlet a au plus une solution; si h est inférieur à un nombre positif fixe, un autre théorème de M. Picard indique des domaines pour lesquels il y a encore au plus une solution (on sait que, dans ces questions, l'unicité entraîne l'existence effective d'une solution). La seconde remarque est qu'un certain nombre introduit par M. Picard ne dépend pas de l'orientation des axes. Georges Giraud.

Spezielle Funktionen:

Belardinelli, Giuseppe: Su una classe di equazioni differenziali di ordine infinito. Boll. Un. Mat. Ital. 13, 155—159 (1934).

In der Reihe $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ genügen die Koeffizienten c_n den folgenden Bedingungen:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\varphi(n)}{\psi(n)} \right| = \alpha$ (α endlich). b) Die Nullstellen der Funktion $\varphi(z)$ sind $\neq 0, 1, 2, \dots$ c) $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ sind entwickelbar in die Newtonschen Interpolationsreihen

$$\varphi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z(z-1) \cdots (z-m+1); \quad \psi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (z+1)z \cdots (z-m+2),$$

welche konvergieren in einer Halbebene mit endlicher Konvergenzabszisse. Wenn

$\varphi(n)$ und $\psi(n)$ Polynome sind (ψ höheren oder gleichen Grades als φ), so ist $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

die klassische hypergeometrische Reihe von Goursat, Pincherle, Mellin usw. Wenn dagegen entweder 1. φ und ψ zwei ganze transzendente Funktionen sind, oder wenn sie konvergieren in einer Halbebene und der Annahme c genügen, oder 2. φ ein Polynom ist und ψ eine Funktion, welche der Annahme c genügt, so nennt der Verf.

die Reihe y eine hypergeometrische Reihe unendlicher Ordnung. Der Verf. zeigt, daß diese Reihe der Differentialgleichung

$$\sum_{n=0}^{\infty} (b_n - a_n x) x^n \frac{d^n y}{dx^n} = 0 \quad (b_0 = 0)$$

genügt. Er nennt diese Gleichung eine hypergeometrische Differentialgleichung unendlicher Ordnung. Weiter werden die Differentialoperatoren

$$A(y) = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n - a_n x) x^n \frac{d^n y}{dx^n} \quad (b_0 = 0)$$

betrachtet (hypergeometrische Differentialoperatoren unendlicher Ordnung). Insbesondere gilt: $A(x^n) = x^n \psi(n-1) - x^{n+1} \varphi(n)$. Ein Operator der Form $A(x^n) = \gamma_n x^n + \gamma_{n-1} x^{n+1} + \dots \gamma_{n+r} x^{n+r}$ wird von Pincherle Normaloperator r -ten Ranges genannt. Die obengenannten Operatoren sind also Normaloperatoren ersten Ranges.

S. C. van Veen (Dordrecht).

Humbert, Pierre: Sur les intégrales de Fresnel. Bul. Sect. Sci. Acad. Roum. 7, 530—534 (1934).

In this paper operational methods are used to obtain results involving Fresnel's integrals. Using the definitions

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du, \quad C(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du,$$

it is proved, for example, that

$$\int_0^x J_{\frac{1}{2}}(x-y) C(y) dy = \int_0^x J_{-\frac{1}{2}}(x-y) S(y) dy = \frac{1}{2}(1 - \cos x).$$

It is also shown that $S(x)$ satisfies the integral equation

$$3S(x) = xJ_{\frac{1}{2}}(x) + \int_0^x [J_{\frac{1}{2}}(x-y) + 2\sin(x-y)] S(y) dy.$$

W. N. Bailey (Manchester).

Meijer, C. S.: Über die Integraldarstellungen der Whittakerschen Funktion $W_{k,m}(z)$ und der Hankelschen und Besselschen Funktionen. Nieuw Arch. Wiskde 18, 35—57 (1934).

In dieser Arbeit hat der Verf. ein neues Integral abgeleitet für die Whittakersche Funktion $W_{k,m}(z)$ (siehe Whittaker und Watson, Modern Analysis, Chapter XVI).

Er zeigt, daß für jedes $z \neq 0$ mit $-\frac{3\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$

$$V_{k,m}(z) = -\frac{\Gamma(1-\alpha)}{2\pi i} e^{-\frac{1}{2}z^k} \int_{\infty e^{i\mu}}^{(0+)} e^{-t} (-t)^{\alpha-1} F\left(-k + \frac{1}{2} - m, -k + \frac{1}{2} + m; \alpha; -\frac{t}{z}\right) dt. \quad (1)$$

Hierin ist μ ein beliebiger Punkt des Intervalles:

$$\max\left(-\frac{\pi}{2}, -\pi + \arg z\right) < \mu < \min\left(+\frac{\pi}{2}, \pi + \arg z\right), \quad \mu - \pi \leq \arg(-t) \leq \mu + \pi,$$

und α ist eine beliebige, aber nicht ganze rationale Zahl. Es wird vorausgesetzt, daß der Punkt $t = -z$ außerhalb des Integrationsweges liegt. Mittels der Beziehung

$$H_{\nu}^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i\left(\frac{1}{2}\nu\pi + \frac{\pi}{4}\right)} W_{0,\nu}(-2iz)$$

folgt hieraus für jedes $z \neq 0$ mit $-\pi < \arg z < +2\pi$

$$V_{\nu}(z) = \frac{i\Gamma(1-\alpha)}{\pi\sqrt{2\pi z}} e^{i\left(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{\pi}{4}\right)} \int_{\infty e^{i\mu}}^{(0+)} e^{-t} (-t)^{\alpha-1} F\left(\frac{1}{2} - \nu, \frac{1}{2} + \nu; \alpha; \frac{t}{2iz}\right) dt, \quad (2)$$

wo α beliebig, nicht ganz rational ist, und

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \frac{e^{i(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{\pi}{4})}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{it} t^{\alpha-1} F\left(\frac{1}{2} - \nu, \frac{1}{2} + \nu; \alpha; \frac{t}{2iz}\right) dt, \quad (2')$$

wo $\Re(\alpha) > 0$ ist. — Der Verf. zeigt weiter, daß die verschiedenen bekannten Integraldarstellungen der Hankelschen und Besselschen Funktionen (die Poisson-Hankelsche Klasse, die Whittakersche Klasse, die Bessel-Schläfli-Sommerfeldsche Klasse und die Gegenbauersche Klasse [siehe Watson, Bessel Functions]) Spezialfälle von (2) und (2') sind. — Endlich wird (1) angewendet auf die der Hermiteschen Funktion $H_n(z)$ nahe verwandte parabolische Zylinderfunktion

$$D_n(z) = 2^{\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} W_{\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}}, -\frac{1}{2} \left(\frac{z^2}{2}\right).$$

S. C. van Veen (Dordrecht).

Ciorănescu, Nicolas: Sur une classe de polynomes à un paramètre généralisant les polynomes de Legendre. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. **36**, 27—28 (1934).

Die Legendreschen Polynome $X_n(x)$ kann man definieren durch

$$X_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n].$$

Verf. gibt eine Erweiterung, indem er die Differentialquotienten durch Differenzenquotienten ersetzt. Er definiert

$$X_n(x; \omega) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \Delta^{(n)} [(x^2 - 1)^n],$$

wo

$$\Delta f(x) = \frac{f(x + \omega) - f(x)}{\omega}.$$

Man hat $X_n(x; 0) = X_n(x)$. Für die Polynome $X_n(x; \omega)$ und ihre Ableitungen nach x werden drei Relationen bewiesen, welche für $\omega = 0$ in bekannte Beziehungen für $X_n(x)$ übergehen. Beispiel:

$$X'_{n+1}(x; \omega) = (n+1) X_n(x; \omega) + [x + (n+1)\omega] \Delta X_n(x; \omega).$$

Verf. hat schon früher in anderer Weise die Formel für $X_n(x)$ erweitert (Acta math. **61** 135; vgl. dies. Zbl. **7**, 111).

O. Bottema (Sappemeer-Holland).

Bell, E. T.: Exponential polynomials. Ann. of Math., II. s. **35**, 258—277 (1934).

Verf. gibt eine eingehende Diskussion von vier besonderen Polynomklassen A , H , C , D , die zueinander und zu den Klassen H und A_0 der Hermiteschen bzw. Appelschen Polynome in den folgenden Beziehungen stehen:

$$H \prec A \prec B \prec C; \quad A_0 \prec B, \quad A_0 \prec D.$$

($H \prec A$ bedeutet, daß A eine Verallgemeinerung von H ist, usw.) — Die Definition von A erfolgt durch

$$A_n = A_n(x, t; r) = \exp(-xt^r) D_t^n [\exp(xt^r)],$$

wobei r , n ganz, $r > 0$, $n \geq 0$, $D_t = d/dt$ ist. Die Funktionen

$$\exp\left(-\frac{x}{2} t^{2r}\right) A_n(-x, t; 2r)$$

bilden in $-\infty < t < +\infty$ ein Orthogonalsystem. — Zur Definition der Polynome sei eine Folge von variablen Größen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ eingeführt. Dann wird

$$B_0 = 1, \quad B_{n+1} = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \alpha_{\nu+1} B_{n-\nu}.$$

Es ist nicht schwer, eine explizite Darstellung von B_n zu finden. Für $\alpha_j = j! \binom{r}{j} x t^{r-j}$

wird $B_n = A_n$. — Die Polynome von C ergeben sich aus denen von B , indem man α_j durch $\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{j+m} \frac{t^m}{m!}$ ersetzt. Im Falle $\alpha_{2k-1} = 0$, $\alpha_{2k} > 0$ liefern die Funktionen

$$\exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \frac{t^m}{m!}\right) C_n$$

im Intervalle $-\infty < t < +\infty$ ein Orthogonalsystem. — Schließlich definiert man die Klasse D symbolisch durch die erzeugende Funktion

$$\exp(h^*x) \exp(hx) = \exp(hD) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} D_n,$$

mit n positiv ganz. Die Beziehungen zu der Klasse A_0 werden genauer erörtert. Szegő.

Integralgleichungen, Funktionalanalysis und Verwandtes:

Haag, J.: Sur la décomposition du noyau d'une équation de Fredholm en noyaux canoniques. Bull. Sci. math., II. s. 58, 211—232 (1934).

Cette décomposition est obtenue par une méthode directe, indépendante de la théorie des substitutions linéaires. L'étude est poussée jusqu'à la décomposition la plus générale. La méthode suivie consiste à déduire d'une équation donnée $f(x) - \lambda \int H(x, s) f(s) ds = F(x)$ une autre équation de Fredholm dont le terme connu est $F(x) + \lambda \int R(x, s) F(s) ds$, où R est un noyau choisi d'après le but à atteindre, et qui peut dépendre de λ ; l'aut. est probablement le premier à avoir appliqué ce procédé à l'objet actuel.

Georges Giraud (Bonny-sur-Loire).

Rust jr., W. M.: A theorem on Volterra integral equations of the second kind with discontinuous kernels. Amer. Math. Monthly 41, 346—350 (1934).

Sei

$$u(x) = f(x) + \int_0^x K(x, y) u(y) dy; \quad a \leq y \leq x \leq b \quad (1)$$

eine Volterrasche Integralgleichung zweiter Art. Nach Verf. besitzt (1) eine und nur eine stetige Lösung $u(x)$ beim gegebenen stetigen $f(x)$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: a) stetigen $r(x)$ entsprechen stetige $\int K(x, y) r(y) dy$; b) für genügend große n stellt der iterierte Kern $K_{2n}(x, y)$ eine beschränkte und für $a \leq y \leq b$ stetige Funktion dar.

Schauder (Lwów).

Li, Ta: Beiträge zur Eigenwerttheorie. Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. Peiping A 2, 263—267 (1934).

Ist $K_\mu(s, t)$ der μ -te iterierte Kern des symmetrischen Kernes $K(s, t)$ mit den Eigenwerten λ_ν und $\sigma_\mu = \int_a^b K_\mu(s, s) ds$, dann wird $\sigma_2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^2}$, $\sigma_4 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^4}$. Bezeichnet m die Anzahl der zwischen $-A$ und $+A$ gelegenen Eigenwerte, so gilt

$$A^4 \sigma_4 = A^4 \sum_{\nu=1}^m \frac{1}{\lambda_\nu^4} + A^2 \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda_\nu}\right)^2 \cdot \frac{1}{\lambda_\nu^2} \leq A^4 \frac{m}{\lambda_1} + A^2 \sigma_2.$$

Daher ergibt sich die Abschätzung $m \geq \lambda_1^4 \left(\sigma_4 - \frac{\sigma_2}{A^2}\right)$. Daran werden einfache Folgerungen geknüpft.

Rellich (Göttingen).

Fréchet, Maurice: De l'importance, dans les applications, des noyaux échappant à la théorie de Fredholm. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 2053—2055 (1934).

This note announces that a functional equation obtained by S. Chapman [Proc. Roy. Soc. London, A 119, 28 (1928)] in a problem in diffusion gives rise, by a suitable choice of range and integrational operation to a kernel of an integral equation satis-

fying the condition $K(M, P) = \int K(M, Q) K(Q, P) dQ$, but not expressible in the form $\sum_1 A_i(M) B_i(P)$, so that the Fredholm theory is not applicable. *Hildebrandt*.

Fouillade, A.: Sur les substitutions fonctionnelles linéaires. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 20, 282—290 (1934).

Man verdankt F. Riesz die Aufstellung notwendiger und hinreichender Bedingungen, welchen eine Funktion $f(s, t)$ genügen muß, damit das Stieltjessche Integral

(1) $y(t) = \int_0^1 x(s) d_s f(s, t)$ stetigen Funktionen $x(s)$ wieder stetige $y(t)$ zuordnet. Verf.

betrachtet nun solche lineare Funktionaloperationen (1), deren zugeordnete Funktion $f(s, t)$ in s nichtabnehmend ist und nennt sie „positiv“. Folgendes Ergebnis wird bewiesen. Falls (1) positiv ist, so sind die Bedingungen: α) die totale Variation von $f(s, t)$ als Funktion von s besitzt eine von t unabhängige obere Schranke, β) ist s_0 ein Stetigkeitspunkt von $f(s, t_0)$, so ist t_0 ein Stetigkeitspunkt von $f(s_0, t)$ — notwendig und hinreichend für die Überführbarkeit stetiger $x(s)$ in stetige $y(t)$. Ähnliches gilt für Funktionen von mehreren unabhängigen Variablen. Diese Eigenschaften ergeben sich nach Verf. aus der Tatsache, daß bei positiven linearen Operationen von oben halbstetige Funktionen in ebensolche transformiert werden. Es wird zuletzt bemerkt, daß nicht jede Operation (1) sich als Differenz zweier linearer positiver Operationen darstellen läßt. Eine notwendige Bedingung für die Möglichkeit einer solchen Zerlegung wird angeführt. *Schauder* (Lwów).

Differenzgleichungen:

Ghermanesco, M.: Sur les équations aux différences finies. Acta math. 62, 239—287 (1934).

The paper deals with the linear difference equation

$$\sum_p^x E F(x) \equiv \sum_{i=0}^p A_i F(x + \omega_i) = g(x), \quad (\omega_i = \text{const}, R\omega_i > 0) \quad (1)$$

where $g(x)$ and the constants A_i are given, with at least two of the latter distinct from zero. The first part is concerned with the principal solution of (1), for a general $g(x)$ and is thus related to a paper of Bochner on the same equation. — The author derives certain summation formulae (with the remainder term) and expresses the solution in terms of certain polynomials $G_n^k(x)$ — solutions of the equation

$$\sum_p^x E F = \begin{cases} x^{n-k}/(n-k)! & (n \geq k) \\ 0 & (n < k) \end{cases}$$

(where k = smallest positive integer such that $\sum_{i=1}^p A_i \omega_i^k \neq 0$), for which he finds an upper bound:

$$|G_n^k(x)| < a M^n e^{\lambda |x|}. \quad (a, M, \lambda — \text{properly defined constants}) \quad (2)$$

A solution of (1) is also obtained by the method of successive approximations: introduce into (1) a parameter λ , rewriting it as

$$\varphi(x) - \lambda \sum_{i=1}^p A_i \varphi(x + \omega_i) = G(x) \quad (3)$$

and try to satisfy it formally by a power series in λ :

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \lambda^n. \quad (4)$$

The inequality (2) enables the author to derive a simple sufficient condition for the convergence of the series thus obtained. In the special case, where

$$g(x) = x^{P(x)} e^{Q(x)} \left(1 + \frac{a_1}{x} + \dots\right), \quad (x \text{ complex; } P, Q — \text{polynomials})$$

the author discusses the said convergence by the method of R. D. Carmichael (Amer. J. Math. 1916, 1917). The second part of the paper deals with special solutions of (1)

or certain particular forms of $g(x)$. For ex., if $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ integral transcendental function, then $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n G_{n+k}^k(x)$, and the series converges uniformly if

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \frac{1}{M}. \quad (\text{see (2)}) \quad (5)$$

f (5) is not satisfied, the solution is expressed in terms of other integral transcendental functions properly chosen. The author further discusses the case of $g(x)$ meromorphic in the whole plane by means of Hurwitz's method (ibid., 20), also the case where (1) has periodic solutions, extending Picard's method (ibid., 18). He finally shows that (1) can be reduced to Volterra integral equation, and that the foregoing methods can be extended to certain general classes of systems of linear functional equations.

J. Shohat (Philadelphia).

Ritt, J. F.: Algebraic difference equations. Bull. Amer. Math. Soc. 40, 303—308 (1934).

The problem treated in this paper concerns the solution of the algebraic difference equation, $A[y(x+1), y(x), x] = 0$, where A is a non-factorable polynomial in $y(x)$ and $y(x+1)$, with coefficients that are analytic functions of x . The author epitomizes his paper in these words: „I shall derive a result which is roughly to the effect that if A is of degree p in $y(x)$ and of degree r in $y(x+1)$, the number of solutions which involve arbitrary functions cannot exceed the smaller of p and r .“ Defining a c -system as an irreducible system which is not held by any form of order zero, the author proves that if A is of degree r in $y(x+1)$, there can be at most r c -systems in the decomposition of A into essential irreducible systems. This paper is an extension of results published by the author and J. L. Doob in the Amer. J. Math. 55, 505 (1933) (this Zbl. 8, 18) where the definitions of reducibility, c -systems etc. are given.

H. T. Davis.

Funktionentheorie :

Sz. Nagy, Gyula: Untersuchungen über die Lage der nichtreellen Nullstellen von reellen Polynomen und von gewissen reellen ganzen Funktionen. Mat. természett. Értes., 1934, 167—192 u. dtsh. Zusammenfassung 193—194 (1934) [Ungarisch].

Es sei $F(z) = e^{-\gamma z^2} f(z)$ eine reelle ganze Funktion, wobei $\gamma \geq 0$ und $f(z)$ ein Polynom oder eine ganze Funktion vom Geschlecht 0 oder 1 ist. Unter einem kritischen Punkt von $F(z)$ wird ein solcher verstanden, in dem

$$K = K(z) = K(\bar{z}) = \frac{1}{y} \Im \frac{F'(z)}{F(z)} \geq 0, \quad \Im z = y,$$

mit $y \neq 0$. Hat $F(z)$ nichtreelle Nullstellen, so existieren stets kritische Punkte. Der Verf. beweist auf Grund der Kenntnis des kritischen Punktes z_0 , daß $F(z)$ stets Nullstellen oberhalb bzw. unterhalb der gleichseitigen Hyperbel enthält, deren Scheitelpunkte z_0 und \bar{z}_0 sind. Weiterhin werden von Cassinischen Ovalen begrenzte Bereiche angegeben, die mindestens eine Nullstelle von $F(z)$ enthalten; sie hängen außer z_0 von $K(z_0)$ und von der „Höhe“ γ ab.

Szegö (Königsberg i. Pr.).

Cisotti, U.: Sulla determinazione di una funzione analitica nota la parte reale sul contorno. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 19, 527—531 (1934).

L'auteur déduit de l'intégrale de Cauchy une formule presque évidente, qui permet en l'appliquant à un cas particulier la détermination d'une fonction analytique lorsqu'on connaît la valeur de sa partie réelle φ sur un contour fermé s . On a

$$f(z) = f(0) + \frac{z}{\pi i} \int_s \frac{\varphi d\zeta}{\zeta(\zeta - z)} \quad \text{ou} \quad f(z) = f(\infty) - \frac{1}{\pi i} \int_s \frac{\varphi d\zeta}{\zeta(\zeta - z)}$$

avant que z est à l'intérieur ou à l'extérieur de s . On retrouve ainsi la formule de Schwarz qui résoud le problème pour une aire circulaire. — On en déduit aussi la légitimation de la „formule du semi-résidu“ (Cisotti: Atti Accad. naz. Lincei, Rend. 13, 161; ce Zbl. 1, 365).

E. Blanc (Paris).

Wolff, J.: Démonstration simple d'une propriété de l'intégrale d'une fonction holomorphe à partie réelle positive. Nieuw Arch. Wiskde 18, 20—21 (1934).

L'auteur donne une nouvelle démonstration, élémentaire (ne faisant plus intervenir le théorème de Fatou sur les valeurs radiales) de son th. suivant (Bull. soc. math. France 60, 221): si $f(z)$ est f. holomorphe de $z = x + iy$ pour $x > 0$, si $\Re f(z) > 0$

et si $iF(z)$ désigne la partie imaginaire de $\int_1^z f(z) dz$, pour chaque y , $F(x + iy)$ tend vers une limite finie lorsque $x \rightarrow 0$. A noter que, dans son analyse (mém. cité, R. Nevanlinna avait déjà signalé la possibilité d'une preuve élémentaire (voir ce Zbl. 6, 171). G. Valiron (Paris).

Mandelbrojt, Szolem: Quelques remarques sur les fonctions univalentes. Bull. Sci. math., II. s. 58, 185—200 (1934).

Die von Dieudonné [Ann. École norm. 48, 247ff. (1931); dies. Zbl. 3, 119] und von Rogosinski [Math. Z. 35, 93ff. (1932); dies. Zbl. 3, 393] eingehend untersuchte „typisch reellen“ Potenzreihen (t. r.) besitzen besonders einfache Eigenschaften, zu denen Verf. einige neue Beiträge liefert. Diese Klasse von Potenzreihen wird durch die Forderung definiert, daß sie innerhalb des Konvergenzkreises $|z| < R$ für reelles und nur für solche reell ausfallen. (Die schlichten Potenzreihen mit reellen Koeffizienten gehören dieser Klasse an.) — 1. Es sei $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ eine t. r. Potenzreihe, $|z| < 1$. Dann existiert $f(1) = \lim_{r \rightarrow 1-0} f(r)$, und man hat, $R_p = f(1) -$ gesetzt, $\sigma_p = 1 + a_2 + a_3 + \dots + a_p$,

$$\left| R_p - \frac{a_{p+1}}{2} \right| - \left(R_p - \frac{a_{p+1}}{2} \right) \leq \sigma_p + \frac{a_{p+1}}{2} \leq 2f(1).$$

Für ungerade $f(z)$ gilt $|R_p| - R_p \leq \sigma_p \leq 2f(1)$. — 2. Mit analogen Voraussetzungen wie unter 1. gilt

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \frac{\sigma_{n+1}}{2} > \frac{n}{4} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n > \frac{n}{2}.$$

Man hat ferner

$$f(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n + \frac{\sigma_{n+1}}{2}}{n}.$$

Im ungeraden Falle kann hier $\frac{\sigma_{n+1}}{2}$ fortgelassen werden. *Szegő* (Königsberg, Pr.).

Saxer, Walter: Über eine Verallgemeinerung des Satzes von Schottky. Compositio Math. 1, 207—216 (1934).

Die von Bieberbach und Montel herrührende Verschärfung des Schottkyschen Satzes wird hier noch weiter verschärft, indem das folgende Resultat erzielt wird: Die $p + 1$ ersten Koeffizienten der in $|z| < 1$ konvergenten Potenzreihe $f(z)$ mögen dem absoluten Betrage nach unterhalb gegebener Schranken k_0, k_1, \dots, k_p liegen; ferner besitze $f(z)$ in $|z| < 1$ höchstens p Nullstellen und es gebe einen Kreisring $r < |z| < 1$, in dem sich höchstens q Einstellen befinden, $q \geq p$. Dann gilt für $|z| < 1 - \vartheta$ ($0 < \vartheta < 1$)

$$\log |f(z)| < \vartheta^{-1} C,$$

wobei C eine nur von $k_0, k_1, \dots, k_p, p, q, r$, nicht aber von ϑ abhängige positive Konstante bezeichnet. — Der Beweis gelingt durch Zurückführung auf den Schottkyschen Satz mittels vollständiger Induktion. Dabei wird freilich eine Abschätzung der „Schottkyschen Schranke“ als bekannt vorausgesetzt. *Szegő* (Königsberg, Pr.).

Whittaker, J. M.: On the fluctuation of integral and meromorphic functions. Proc. London Math. Soc., II. s. 37, 383—401 (1934).

Dans un mémoire précédent, l'a. avait donné des prop. des régions dans lesquelles le module d'une f. entière $f(z)$, d'ordre fini, reste de l'ordre du maximum du module ($M(r) = \text{maximum de } |f(re^{i\omega})|$, $0 < \omega \leq 2\pi$; régions où $\log |f(z)| > h \log M(r)$). Il les complète ici dans le cas particulier où ces régions contiennent des cercles de rayon

fini. Voici le principal résultat nouveau: si $f(z)$ est d'ordre inf. ou égal à 2, et si $n(r)$ étant le nombre des zéros de module moindre que r on a $n(r) = o(r^2)$, il correspond à chaque $d > 0$ un nombre $h(d)$ et une suite de cercles $|z - \zeta| \leq d$, $\zeta \rightarrow \infty$, dans lesquels

$$\log |f(z)| > h(d) \log M(|\zeta|); \quad (1)$$

$h(d)$ ne dépend pas de $f(z)$; en outre, les points ζ pour lesquels on a (1) forment un ensemble dont la densité superficielle supérieure est supérieure à un nombre positif. Ces prop. sont obtenues par l'étude de la décomposition en facteurs; l'a. en déduit des propriétés des f. entières données par leurs valeurs aux sommets d'un quadrillage et complète ainsi un joli th. de Pólya (Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 1933, 67—69). Les th. s'étendent en partie aux f. méromorphes. On peut noter que la considération de la série de Taylor avait conduit le souss. à des prop. des régions où $|f(z)| > h M(r)$ et pourrait être utile pour l'étude de (1) dans le cas de l'ordre infini (voir Integral functions, 1923, où l'on trouvera aussi, p. 144, l'introduction de la notion de lower order).

G. Valiron (Paris).

Yosida, Kôsaku: On a class of meromorphic functions. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 16, 227—235 (1934).

Die elliptischen Funktionen und ihre Ausartungen erfreuen sich der Eigenschaft, daß für jede Folge gegebener komplexer Zahlen c_n die Funktionenmenge $f_n(z) = f(z + c_n)$ eine Normalfamilie bildet. Verf. untersucht die Klasse aller meromorphen Funktionen $f(z)$ mit dieser Eigenschaft, wobei er den Begriff der Kugelableitung heranzieht (Marty, vgl. dies. Zbl. 4, 118f.); diese muß beschränkt sein, woraus $T(r, f) = O(r^2)$ folgt. Sind a_m und b_n irgend zwei Stellen aus verschiedenen Stellensorten a, b , so wird $\lim |a_m - b_n| > 0$. Speziell wird die Unterklasse jener Funktionen $f(z)$ herausgegriffen und näher betrachtet, für die die obigen Normalfamilien keine konstanten Grenzfunktionen besitzen; diese Funktion haben die algebraische Verzweigtheit 2 (vgl. E. Ullrich, S.-B. preuß. Akad. Wiss. 1929, 600, d), und ihre Umkehrung hat keine transzendenten Singularitäten.

Ullrich (Marburg, Lahn).

Yosida, Kôsaku: On algebroid-solutions of ordinary differential equations. Jap. J. Math. 10, 199—208 (1934).

Verf. hatte in einer früheren Note [Jap. J. Math. 9, 253 (1933); dies. Zbl. 7, 120] einen Satz von Malmquist über die Differentialgleichung $y' = R(x, y)$ mit den Methoden der Wertverteilungslehre erfaßt: Ist $R(x, y)$ nicht eine ganze rationale Funktion höchstens 2. Grades (Riccatische Differentialgleichung), sondern eine verwickeltere rationale Funktion von y , so sind alle eindeutigen Lösungen schon rational. Jetzt kann er ähnliche Aussagen für gewisse algebraische Differentialgleichungen auch höherer Ordnung machen, wie $R(x, y^{(n)}) = R(x, y)$, und speziell für $(y')^n = R(x, y)$. Soll ihre Lösung k -deutig algebroid sein, so muß k größer oder gleich einer gewissen Zahl sein, die von n und den Graden der rationalen Funktionen R und R_1 bzw. den Graden ihrer Zähler und Nenner abhängt. Liegt k unter dieser Schranke, so kann die Lösung höchstens algebraisch sein. Der Beweis stützt sich ganz auf die Wertverteilungslehre für algebroiden Funktionen.

Ullrich (Marburg, Lahn).

Bergmann, S.: Sur quelques propriétés des transformations par un couple de fonctions de deux variables complexes. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 19, 474—478 (1934).

Die Gesamtheit der Funktionen zweier komplexer Veränderlichen $h(w, z)$, die in einem Bereiche \mathfrak{B} regulär sind und für die $\int_{\mathfrak{B}} |h(w, z)|^2 dv \leq 1$, sind in jedem Punkte von \mathfrak{B} gleichmäßig beschränkt. Die obere Grenze der Funktionswerte definiert die positive, reell analytische und gegenüber analytischen Transformationen von \mathfrak{B} invariante Kernfunktion $K_{\mathfrak{B}}(w, z; \bar{w}, \bar{z})$. Mittels der Kernfunktion wird \mathfrak{B} eine Riemannsche Metrik aufgeprägt. Der durch die zur Kernfunktion gehörige quadratische Form definierte Raum heißt der Urraum der Bereichsklasse von \mathfrak{B} . Die kartesischen Koordinaten von \mathfrak{B} und seinen Bildbereichen sind Gaußsche Koordinaten im Urraum.

Verf. überträgt nun Ergebnisse der Differentialgeometrie auf die Theorie der analytischen Abbildungen im (w, z) -Raum. *Behnke* (Münster i. Westf.).

Caccioppoli, Renato: Intégrales doubles de Cauchy et fonctions monogènes généralisées. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 2227—2230 (1934).

Es sei $\varphi(x, y)$ eine über die ganze Ebene E summierbare Funktion, die auf der perfekten beschränkten Menge R verschwindet, und es werde

$$f(z) = \int_E \frac{\varphi(\xi, \eta)}{\zeta - z} d\xi d\eta \quad (z = x + iy, \zeta = \xi + i\eta)$$

gesetzt. Es wird nach hinreichenden Bedingungen für die Monogenität von $f(z)$ gefragt. Antwort (ohne Beweis): Es sei $r(\xi, \eta)$ die Entfernung des Punktes (ξ, η) von R , und $A(\rho)$ der Flächeninhalt der Menge aller Punkte mit $r \leq \rho$. Wenn dann mit einem positiven ε die Ungleichung $\log [-\log |\varphi(\xi, \eta)|] \geq A(r)/r^{2+\varepsilon}$ besteht, so bestimmen die Werte der Ableitungen von $f(z)$ in einem Punkte das Verhalten von $f(z)$ auf ganz R .

Willy Feller (Kopenhagen).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

Bernstein, Serge: Principes de la théorie des équations différentielles stochastiques. I. Trav. Inst. phys.-math. Stekloff 5, 95—123 (1934).

Es sei $P_n(y)$ die Wahrscheinlichkeit der Ungleichung $y_n = \sum_0^{n-1} \Delta y_\nu \leq y$ im Zeitpunkt $t = \sum_1^n \Delta t_\nu$. Dabei sind die Summanden $\Delta y_\nu = \Phi(\alpha, y_{\nu-1}, t, \sqrt{\Delta t}) \sqrt{\Delta t}_\nu$, der in den Argumenten $\alpha, y, t, \sqrt{\Delta t}$ stetigen Relation

$$\Delta y = \Phi(\alpha, y, t, \sqrt{\Delta t}) \sqrt{\Delta t} = A(y, t, \sqrt{\Delta t}) \Delta t + f(\alpha, y, t, \sqrt{\Delta t}) \sqrt{\Delta t} \quad (1)$$

zu entnehmen, wobei α (evtl. α, β, \dots) eine zufällige Variable ist, deren Verteilungsfunktion bekannt sei; außerdem sei der Erwartungswert $E f(\alpha, y, t, \sqrt{\Delta t}) = 0$. Der Verf. untersucht, unter welchen Bedingungen die Funktion $P_n(y)$ mit $\Delta t \rightarrow 0$ gegen eine Grenzwahrscheinlichkeit $P(y, t)$ konvergiert. Als reduzierte Gleichung zu (1) wird die Gleichung

$$\Delta y = A(y, t) \Delta t + f(\alpha, y, t) \sqrt{\Delta t}$$

bezeichnet. Die Mannigfaltigkeit der zur gleichen reduzierten Gleichung gehörenden Gleichungen (1) wird durch die Bedingung der Monotonität eingeschränkt: es soll bei genügend kleinen Δt die Ungleichung $\Phi_\nu \sqrt{\Delta t} < \rho < 1$ gelten, so daß sich also alsdann die Gleichung $y_{n+1} = y_n + \Phi(\alpha, y_n, t, \sqrt{\Delta t}) \sqrt{\Delta t}$ nach y_n auflösen läßt. — Zunächst ergibt sich das allgemeine Existenztheorem: Falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein A existiert, derart, daß $P_n(A) - P_n(-A) > 1 - \varepsilon$ für alle $t \leq t_0, \Delta t < \rho_0$ gilt, so gibt es eine Folge $\Delta t \rightarrow 0$, für die $P_n(y) \rightarrow P(y, t)$ konvergiert. $P(y, t)$ besitzt dabei stetige Ableitungen nach y bis zur Ordnung k in jedem Intervall, worin $P_n(y)$ derartige Ableitungen bis zur Ordnung $k+1$ besitzt. Aus der Tschebycheffschen Ungleichung erkennt man, daß die Voraussetzung des obigen Satzes erfüllt ist, falls es zwei Zahlen λ und L gibt, derart, daß $E |y_n|^\lambda \leq L$ für alle $t \leq t_0; \Delta t < \rho_0$ gilt. Falls außerdem Gleichung (1) monoton ist, so genügt jede dieser $P(y, t)$ der folgenden verallgemeinerten Planckschen Gleichung:

$$\frac{\partial P^{(-2)}}{\partial t} = (A_y P)^{(-2)} - [(A + \frac{1}{2} B_y) P]^{(-1)} + \frac{1}{2} B P. \quad (2)$$

Hierbei ist $B = E \{f^2(\alpha, y, t)\}$, und die Symbole (-1) bzw. (-2) bedeuten einmalige bzw. zweimalige mehrbestimmte Integration nach y . — Bleibt im besonderen $\frac{\partial P_n^3}{\partial y^3}$ beschränkt, so ist (2) äquivalent mit der Fokker-Planckschen Differentialgleichung

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -A p + \frac{1}{2} \frac{\partial (B p)}{\partial y}; \quad p = P_y. \quad (3)$$

Wenn A und $B > 0$ von t unabhängig sind und die Voraussetzung $E |y_n|^\lambda \leq L$ für alle $t > 0$ gilt, so konvergiert $P(y, t)$ mit $t \rightarrow \infty$ gegen die stationäre Lösung von (3), für die

$$p = \frac{C}{B} e^{2 \int \frac{A}{B} dy}; \quad (C = \text{konst.})$$

gilt. Es werden auch Bedingungen über A und f angegeben, unter denen die Voraussetzung $E |y_n|^\lambda \leq L$ zutrifft. — Im weiteren Teil der Arbeit untersucht der Verf. die Gleichungen (2) und (3) u. a. hinsichtlich der eindeutigen Bestimmtheit ihrer Lösungen und ferner hinsichtlich der Frage, wann die einer Anfangsverteilung $P_0(y)$ entsprechende Lösung der Gleichung (3)

als Grenzverteilung von Verteilungen $P_n(y)$ nach Gleichung (1) erscheint. Es wird auch ein Beispiel konstruiert, wo dies nicht der Fall ist.

Lüneburg (Utrecht).

Mihoe, G.: Sur les chaînes multiples discontinues. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 135—2137 (1934).

Verf. beschäftigt sich mit den Markoffschen Ketten l -ter Ordnung und zeigt, daß der Einfluß eines vorhergegangenen Ereignisses auf die Wahrscheinlichkeit des n -ten Versuches für $n \rightarrow \infty$ unwirksam wird, falls die Wahrscheinlichkeit der m Merkmale im n -ten Versuche, unter einer jeden der m^l Voraussetzungen für die l unmittelbar vorhergegangenen Versuchen, stets größer sei als ein festes $\vartheta > 0$. Bruno de Finetti.

Fisher, R. A.: Two new properties of mathematical likelihood. Proc. Roy. Soc. London A 144, 285—307 (1934).

Die durch die Bernoullische Formel

$$\binom{n}{a} x^a (1-x)^{n-a},$$

die die Wahrscheinlichkeit bestimmt, daß in einer Alternative ein Ereignis mit der Grundwahrscheinlichkeit x unter n Beobachtungen a mal auftritt, ausgedrückte Funktion $L(x)$ bezeichnet der Verf. als mathematische „likelihood“ von x . Das Ziel dieser Begriffsbildung ist, die grundsätzlichen Schwierigkeiten des Bayeschen Problems, die Wahrscheinlichkeit von x unter der Bedingung a zu bestimmen, zu umgehen und die durch die Kenntnis von a ermöglichten Aussagen über die Grundwahrscheinlichkeit x durch Diskussion der Likelihood-Funktion $L(x)$ zu gewinnen. Im Anschluß an frühere Arbeiten [Proc. Cambridge Philos. Soc. 22 (1925)] behandelt der Verf. hier insbesondere solche statistischen Mannigfaltigkeiten, die der Bedingung der „sufficiency“ genügen; das sind Mannigfaltigkeiten, in denen es einen bestimmten Mittelwert T_1 mit der Verteilungsfunktion $f(T_1; \Theta)$ gibt — Θ ist ein Parameter — derart, daß die simultane Verteilung $f(T_1, T_2; \Theta)$ für T_1 und irgendeinen anderen Mittelwert T_2 von der Form $f(T_1; \Theta) \Phi(T_1; T_2)$ ist, wobei Φ , d. h. die Wahrscheinlichkeit von T_2 unter der Bedingung T_1 nicht von Θ abhängt. Es wird gezeigt, daß hier die Stelle des Maximums der Likelihood-Funktion $L(\Theta)$ einen solchen Mittelwert T liefert; es werden explizite Formeln angegeben, aus denen sich aus der alleinigen Kenntnis von $L(\Theta, T)$ die Verteilungsfunktion $f(T, \Theta)$ vollständig ergibt. Darüber hinaus werden auch für eine andere Klasse von Mannigfaltigkeiten, die der obigen Bedingung nicht genügen, Methoden angegeben, um aus L , insbesondere deren Maximalwert, die Kenntnis der Grundwahrscheinlichkeit zu gewinnen.

Lüneburg (Utrecht).

Baten, W. D.: The probability law for the sum of n independent variables, each subject to the law $(1/(2h)) \operatorname{sech}(\pi x/(2h))$. Bull. Amer. Math. Soc. 40, 284—290 (1934).

Die Wahrscheinlichkeit, daß eine statistische Variable zwischen den Werten x und $x + dx$ liegt, sei durch die Funktion $dx/2h \mathfrak{C}o\int^{\pi x/2h}$ bestimmt. Die Wahrscheinlichkeit $p_n(u) du$, daß die Summe $\sum_{i=1}^n x_i$ von n unabhängigen Werten dieser Variablen die Ungleichung $u \leq \sum_{i=1}^n x_i \leq u + du$ erfüllt, wird alsdann durch die einer allgemeinen Regel entsprechenden Darstellung

$$p_n(u) = h^{-1} \pi^{-1} \int_0^\infty \mathfrak{C}o\int^{-n} x \cos ux/h \, dx$$

gegeben. Der Verf. findet durch Auswertung dieses Integrals vermittels komplexer Integration die Funktionen:

$$p_{2n}(u) = \frac{1}{2(2n-1)! h^{2n}} \frac{u \prod_{r=1}^{n-1} (u^2 + 4r^2 h^2)}{\mathfrak{C}in \prod u/2h},$$

$$p_{2n+1}(u) = \frac{1}{2(2n)! h^{2n+1}} \frac{\prod_{r=0}^{n-1} (u^2 + (2r+1)^2 h^2)}{\mathfrak{C}o\int \prod u/2h}.$$

Lüneburg (Utrecht).

Craig, A. T.: Note on the moments of a Bernoulli distribution. *Bull. Amer. Math. Soc.* **40**, 262—264 (1934).

V. Romanovsky in *Biometrika* **15**, 410—412 (1923), obtained a recursion formula (in s) for the s -th moment of the binomial, $(p + q)^n$ about its mean, for fixed n , after this had been sought in vain by K. Pearson. The author offers a simple proof for this result, and applies the method also to the Poisson exponential distribution, $g(x) = \lambda^x e^{-\lambda} / x!$, $x = 0, 1, \dots, n$, (n large), obtaining $\mu_{s+1} = \lambda(s\mu_{s-1} + d\mu_s/d\lambda)$.
Bennett (Providence).

Dieulefait, Carlos E.: Sur les développements des fonctions des fréquences en séries de fonctions orthogonales. *Metron* **11**, Nr 4, 77—81 (1934).

Verf. schildert ein Verfahren zur Erzeugung von Orthogonalsystemen, das im wesentlichen mit dem Gram-Schmidtschen übereinstimmt, ferner das in der Statistik übliche Analogon desselben, bei dem an die Stelle der Integration ein Summationsprozeß tritt. Die Beispiele sind in Anbetracht der Anwendungen auf die Statistik gewählt worden.
Szegő (Königsberg, Pr.).

Krishnaswami Ayyangar, A. A.: Note on the recurrence formulae for the moments of the point binomial. *Biometrika* **26**, 262—264 (1934).

By an ingenious transformation of the general term in the series for the s -th moment about the mean of the point binomial, the author derives quite simply a new recurrence formula for the incomplete moments of this distribution function which includes a new recurrence formula for the complete moments as a special case. By the use of the same methods he also derives Pearson's and Frisch's recurrence formulae for complete and incomplete moments of the point binomial, also in a quite simple fashion.
Cecil C. Craig (Ann Arbor, Michigan).

Krishnaswami Ayyangar, A. A.: A note on the incomplete moments of the hypergeometrical series. *Biometrika* **26**, 264—265 (1934).

By elementary methods the author derives a recurrence formula for the incomplete moments of the hypergeometrical distribution which includes Pearson's recurrence formula for the complete moments as a special case. Cecil C. Craig (Ann Arbor).

Hansmann, G. H.: On certain non-normal symmetrical frequency distributions. *Biometrika* **26**, 129—195 (1934).

The author makes an extensive study of the symmetric fourth order curves of Pearson, namely of the solutions of $y' = -(x + a)y/(c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n)$ when $n = 4$, and $c_1 = c_3 = 0$. Twenty types are obtained of which 6 are "main types" each involving 3 parameters, and 14 are "transition types" involving 2 or fewer parameters, each of the latter serving as a limiting case for more than one "main type". The solution is given in closed form in each instance. The constants are obtained explicitly in terms of the even moments, $\beta_2, \beta_4, \beta_6$, as are the integral for N and the value of y_0 , for each of the twenty types, together with the algebraic inequalities upon the moments satisfied by the respective types. Numerical tables for transition curves are given, contour diagrams and transition curves are drawn with heterotypic axes indicated. Applications are then made to a number of frequency tables previously published by other writers, and it is shown that an appreciable improvement in closeness of fit is obtainable by the explicit use of β_6 here rendered possible. For some cases complete identification of the best fitting Pearson curve of the fourth order raises questions left unanswered and suggesting an unprofitable analysis of sixth order symmetric curves.
Bennett (Providence).

Enlow, E. R.: Quadrature of the normal curve. *Ann. math. Statist.* **5**, 136—141 (1934).

Zoch, Richmond T.: Invariants and covariants of certain frequency curves. *Ann. math. Statist.* **5**, 124—135 (1934).

Šamonil, Ferdinand: Remark to the summation-formulas of the Lubbock's type. *Aktuár. Vědy* **4**, 120—124 (1934).

Doob, J. L.: Stochastic processes and statistics. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 0, 376—379 (1934).

Im Anschluß an die Untersuchungen von Khintchine wird 1. auf die Allgemeinheit einer Interpretation des Problems im Funktionalraume hingewiesen, und 2. für den Spezialfall der Unabhängigkeit eine hinreichende Bedingung angegeben, daß $E =$ Erwartungswert von x_j existiert, und daß mit der Wahrscheinlichkeit 1 die

Beziehung $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j = E$ besteht.

Bruno de Finetti (Trieste).

Steffensen, J. F.: On certain measures of dependence between statistical variables. Biometrika 26, 251—255 (1934).

The author develops from first principles a corrected form of his proposed substitute (this Zbl. 7, 21) for Pearson's Mean Square Contingency. Let p_{ij} be the probability that x assumes the value x_i and y the value y_j . Let $p_{i*} = \sum_j p_{ij}$, $p_{*j} = \sum_i p_{ij}$, then $p_{**} = \sum_{ij} p_{ij} = \sum_i p_{i*} = \sum_j p_{*j} = 1$. The proposed measure is $\psi^2 = \sum_{ij} p_{ij} \varphi_{ij}^2$, where $\varphi_{ij}^2 = (p_{ij} - p_{i*} p_{*j})^2 / [p_{i*} (1 - p_{i*}) p_{*j} (1 - p_{*j})]$. This has the properties, (I) $0 \leq \psi^2 \leq 1$, (II) $\psi^2 = 0$ if and only if the variables are completely independent ($p_{ij} = p_{i*} p_{*j}$), (III) $\psi^2 = 1$ if and only if the variables are completely dependent ($p_{ii} = p_{i*} = p_{*i}$, $p_{ij} = 0$, for $i \neq j$). A second measure, ω , analogous to ψ^2 but more readily calculable is also proposed. Certain difficulties in extending to continuous probabilities are admitted.

Bennett (Providence).

Pearson, Karl: Remarks on professor Steffensen's measure of contingency. Biometrika 26, 255—260 (1934).

By a modification in the method of approach the author first disposes of Steffensen's difficulties in extending ψ^2 to the continuous case (see the previous citation), obtaining an explicit double integral form in the limit. This form is compared with the author's algebraic and integral forms for the φ^2 used in C_2 . By examining numerical results in eight selected cases, the author shows that Steffensen's measure may differ widely from his own and may ill suggest the actual degree of correlation. Bennett.

Kemp, W. B.: Some methods for statistical analysis. J. Amer. Statist. Assoc. 9, 147—158 (1934).

$n'k$ Beobachtungswerte sind in einer Matrix zu n' Zeilen und k Spalten angeordnet, wobei die Werte in den Zeilen miteinander korreliert sind. Zur Analyse eines derartigen Materials betrachtet der Verf. das Schwankungsmaß $\sigma_x'^2 = \frac{S(x - \bar{x})^2}{n'}$ für jede Spalte und berechnet dann das arithmetische Mittel $\sigma_g'^2$ für alle Spalten. Für die Zeilensummen $x' + x'' + \dots + x^{(k)}$ wird das entsprechende Schwankungsmaß $\sigma_{x'+x''+\dots+x^{(k)}}'^2$ gebildet. Nun denkt sich der Verf. jede Beobachtung in einen korrelierten Bestandteil mit der Korrelation 1 und in einen nicht korrelierten Bestandteil zerlegt, bezeichnet die dazugehörigen Schwankungsmaße mit $\sigma_c'^2$ und $\sigma_u'^2$ und findet diese beiden Werte aus den Gleichungen: $\sigma_c'^2 + \sigma_u'^2 = \sigma_g'^2$ und $k^2 \sigma_c'^2 + k \sigma_u'^2 = \sigma_{x'+x''+\dots+x^{(k)}}'^2$. Diese neuen Schwankungsmaße $\sigma_c'^2$ und $\sigma_u'^2$ werden nun zur Berechnung der Intra-class-korrelation und der von verschiedenen Ursachen herrührenden mittleren Fehlerquadratrate verwendet. Die unkorrigierte Intra-class-korrelation ergibt sich als $\frac{\sigma_c'^2 - \sigma_m'^2}{\sigma_g'^2 + \sigma_m'^2}$, wobei $\sigma_m'^2$ das analog gebildete Schwankungsmaß für die Spaltenmittel darstellt und bei großem n' und kleinem k als $\sigma_u'^2 \frac{k-1}{k(n'-1)}$ berechnet werden kann. Für die korrigierte Intra-class-korrelation wird $\sigma_c'^2 / \sigma_g'^2$ als guter Näherungswert gefunden. — Alle entwickelten Methoden werden an Beispielen erläutert und die Resultate mit denen, die sich nach der „Analysis of Variance“ von R. A. Fischer (Statistical Methods for Research Workers, S. 178ff.) ergeben, verglichen. Schließlich wird auch noch der

Fall behandelt, daß in den einzelnen Spalten verschiedene Beobachtungsanzahlen vorliegen. *H. Münzner* (Göttingen).

Lüders, Rolf: Die Statistik der seltenen Ereignisse. *Biometrika* 26, 108—128 (1934).

The author derives the generalized law of small numbers due to H. Pollaczek-Geiringer [*Z. angew. Math. Mech.* 8, 292 (1928)] under the assumptions that the probabilities that the occurrence of an event singly, in pairs, in triplets, etc., are independent and are each governed by a Poisson distribution function. He derives the moment generating function of the frequency function thus derived, which governs the distribution of the total number of occurrences of the event in question, and gives its first three moments. The distribution function of Eggenberger and Pólya [loc. cit. 3, 279 (1923)] is shown to be a special case and he generalizes this latter law, adding a third parameter. Since the second and third moments tend to have large sampling errors he uses the device of multiplying each ordinate by a parameter lying between 0 and 1 raised to a power equal to the corresponding abscissa. The factorial moments calculated from the modified ordinates he calls modified moments and these have reduced standard errors. He exhibits a method of calculating the parameters in his generalized Pólya-Eggenberger formula by the use of three arbitrary values of this parameter. He concludes with several numerical examples showing excellent graduations obtained by the use of his distribution functions, especially when the Poisson and the Pólya-Eggenberger laws are much less successful. *Craig*.

Castellano, Vittorio: Sullo scarto quadratico medio della probabilità di transvariazione. *Metron* 11, Nr 4, 19—75 (1934).

The concept of transvariation is due to C. Gini, *Il concetto di «transvariazione» e le sue prime applicazioni*, Studi di Economia, Finanza e Statistica (1916). The probability of transvariation for a given pair of distributions over a common range is defined as twice the probability that if an element be selected at random from each distribution the difference in sign of their abscissas shall be contrary to that of a specified mean (here taken as the median) for the respective distributions. This is important, for example, in correlating sex measurements. The author considers the effect of chance upon the value of the probability of transvariation between a random sample and the universe from which the sample is selected, and determines the expression for the standard deviation as a functional. It is a function of the mean values of products taken two by two of differences that the frequencies of single quantities in the total distribution may present in the domain. Making various extensions of the normal law to the problem of simultaneous drawings from an urn, the author determines the order of magnitude of the errors. Various applications to examples are made, with numerical results exhibited in tables. The article contains 67 principal formulas. *Bennett* (Providence).

Tříska, Karel: How to compute the standard error of a correlation with ρ . *Aktuár Vědy* 4, 134—137 (1934).

● **Mineur, H.:** Éléments de statistique mathématique applicables à l'étude de l'astronomie stellaire. (Coll. actualit. sci. et industr.) Paris: Hermann & Cie 1934. 40 Frs. 12.—.

Loewy, Alfred: Ausbau der allgemeinen Bezeichnungsweisen für die Versicherungsrechnung. *Aktuár. Vědy* 4, 113—119 (1934).

● **Ziezold, Bernhard:** Versicherungsmathematische Fehlerrechnung. (Versicherungswirtschaftl. Forsch. Hrsg. v. Max Gürtler. H. 2.) Leipzig: Robert Noske 1934. W. 47 S. RM. 2.50.

Ziezold untersucht die Wirkungen einer Variation der Rechnungsgrundlagen (Zinsfuß und Sterblichkeit) auf Prämien und Deckungskapital; dabei werden unabhängige Veränderliche die tatsächlichen Überlebenswahrscheinlichkeiten p_{x+k} und die tatsächlichen Diskontierungsfaktoren des k -ten Versicherungsjahres v_{x+k}

$x = 0, 1, 2 \dots$ genommen und entsprechend Funktionen $f(p_x, p_{x+1}, \dots; v_x, v_{x+1}, \dots)$ untersucht. Als Fehler Δf dieser Funktion f wird die Differenz

$$f(p_x, p_{x+1}, \dots; v_x, v_{x+1}, \dots) - f(p_x^{II}, p_{x+1}^{II}, \dots; v_x^{II}, v_{x+1}^{II}, \dots)$$

bezeichnet; hierin sind die Größen $p_x, p_{x+1}, \dots; v_x, v_{x+1}, \dots$ durch den tatsächlichen Ablauf als bekannt vorausgesetzt, während die Größen $p_x^{II}, p_{x+1}^{II}, \dots; v_x^{II}, v_{x+1}^{II}, \dots$ der Prämienberechnung zugrunde gelegt werden. Die Taylorsche Entwicklung mit dem Restgliede 2. Ordnung wird zur Beurteilung des Fehlers herangezogen. Einzeln wird die Methode an der Erlebensversicherung, der abgekürzten Leibrente, der temporären Todesfallversicherung, an der Jahresprämie der gemischten Versicherung und am Dekontungskapital gezeigt. In einem weiteren Teile befaßt sich Z. mit den Grundlagen der Beurteilung der relativen Fehler der Überlebenswahrscheinlichkeiten und der Diskontierungsfaktoren und bringt beachtenswertes statistisches Material. Die Anwendbarkeit der Methode auf die Versicherung anormaler Risiken wird gezeigt und der Einfluß stakularer Änderungen der Zins- und Sterblichkeitssätze behandelt. Anhang: Tafeln, die der praktischen Handhabung der Methode dienen. *F. Knoll (Wien).*

Vajda, Stefan: Der Begriff des mittleren Risikos und seine Erweiterung. Versicherungsarch. 4, 1120—1128 (1934).

A. Tauber brachte in einer Untersuchung (vgl. dies. Zbl. 8, 266—267) Bedenken gegen das Äquivalenzprinzip in der Risikotheorie vor. Vajda polemisiert in der vorliegenden Arbeit gegen die Einwände, die Tauber in der erwähnten Arbeit gegen die Verwendung des Begriffes „mittleres Risiko“ bei Nichtäquivalenz erhoben hatte, und sucht seine Ansicht zu begründen. Insbesondere unternimmt V. den Versuch eines Nachweises der Brauchbarkeit des Ausdruckes $\sqrt{\sum w_i s_i^2}$ für den Fall der Nichtäquivalenz. V. glaubt auf den ersten Blick erkennen zu können, daß die Taubersche Verallgemeinerung des Satzes von Hattendorf keine Verallgemeinerung sei.

F. Knoll (Wien).

Tauber, Alfred: Entgegnung. Versicherungsarch. 4, 1128—1131 (1934).

Tauber weist in seiner Entgegnung auf die vorst. ref. Arbeit von Vajda darauf hin, daß der Vajdasche Begriff „mittleres Risiko“ nicht der Grundforderung entspreche, bei gleichbleibender Leistung des Versicherers und wachsendem Prämienentgelt abzunehmen; der wahrscheinlichkeitstheoretische Charakter der T.schen Begriffe stehe außer Zweifel, die Verallgemeinerung des Satzes von Hattendorf sei mit Recht so bezeichnet worden, da die Formulierung von T. auf die Beschränkung der Äquivalenz verzichte. *F. Knoll (Wien).*

Geometrie.

Algebraische Geometrie:

Seifert, L.: Sur deux surfaces cerclées biquadratiques. Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk H. 191, 1—23 u. franz. Zusammenfassung 23—24 (1934) [Tschechisch].

Im ersten Teile wird die Fläche vierten Grades

$$(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2) = c^2 y^2, \quad c \neq 0$$

in bezug auf ihre verschiedenen Kurven gründlich untersucht. Diese Fläche kann auch als eine Umhüllungsfläche einer Ellipsoidenschar angesehen werden. — Im zweiten Teile wird die — zu der oben genannten — inverse Fläche auf analoge Art studiert. Diese Fläche ist eine Enveloppe von Rotationskegeln. — In beiden Fällen werden auch die Normalflächen längs ausgezeichneter Kurven angegeben. *Hlavatý (Praha).*

Room, T. G.: A generalization of the Kummer 16₆ configuration. I. Proc. London Math. Soc., II. s. 37, 292—337 (1934).

Die Kummersche Fläche kann bekanntlich als scheinbarer Umriß der Segreschen V_3^3 des R_4 , von einem Punkte dieser V_3^3 aus gesehen, erhalten werden. Diese Methode führt auch zu einer einfachen Ableitung der Kummerschen Konfiguration, deren Punkte

bei diesem Verfahren aus den 10 Doppelpunkten der V_3^3 und den 6 durch den Projektionspunkt laufenden Erzeugenden der V_3^3 entstehen. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, dieses Verfahren und damit zusammenhängende Gedankenreihen in Räumen von höherer Dimensionszahl zu verallgemeinern. In dem einfachsten bei der hier behandelten Art der Verallgemeinerung möglichen Falle tritt an Stelle der Segreschen V_3^3 des R_4 eine in R_{13} gelegene Mannigfaltigkeit M_5^{40} mit 35 singulären Punkten, welche 56 R_3 enthalten. Wie durch jeden Punkt der Segreschen V_3^3 6 Geraden — je eine von 6 Systemen von ∞^2 Geraden — laufen, so laufen durch jeden Punkt von M_5^{40} 8 Geraden — je eine von 8 Systemen von je ∞^4 Geraden —. Wie die Segresche V_3^3 durch ein System von ∞^2 durch 5 Punkte auf den R_3 abgebildet werden kann, so M_5^{40} durch ein System von ∞^2 mit 7 festen Doppelpunkten auf den R_5 . (Diese Abbildung wird ausführlich untersucht.) So wie bei dieser Abbildung das Bild des scheinbaren Umrisses der V_3^3 dadurch entsteht, daß man die F^2 noch durch einen 6. Punkt laufen läßt, so muß man hier — um das Bild des scheinbaren Umrisses von M_5^{40} , von einem ihrer Tangential- R_5 aus gesehen, zu erhalten —, von den M_3^4 verlangen, daß sie einen festen Punkt als 8. Doppelpunkt besitzen. Es entsteht (als Analogon zur Weddleschen Fläche) eine M_3^{19} der R_5 mit 8 neunfachen Punkten, deren 28 Verbindungsgeraden zu je zweien dreifache Geraden und deren 56 Verbindungsebenen zu je dreien einfache Ebenen der M_3^{19} sind. Die Normalkurve 5. Ordnung durch die 8 Punkte ist eine dreifache Kurve von M_3^{19} . — Um den scheinbaren Umriß der M_5^{40} selbst zu erhalten, projiziert man M_5^{40} von einem ihrer Tangential- R_5 aus in einen R_7 . Es entsteht eine Mannigfaltigkeit Y mit 64 singulären Punkten, 64 R_3 und 64 ausgezeichneten R_6 -Schnitten. Diese Elemente bilden zusammen eine Konfiguration: Jeder Punkt liegt in 8 R_3 , jeder R_3 enthält 8 auf einer C^3 gelegene Punkte. Jeder R_3 liegt in 8 R_6 und jeder R_6 enthält 8 R_3 . Jedem Punkt von Y entspricht bei der Projektion ein Punktepaar von M_5^{40} . Den Paaren zusammenfallender Punkte entspricht eine auf Y gelegene Mannigfaltigkeit Y_3^{34} des R_7 (Analogon zur Kummerschen Fläche) mit 64 vierfachen Punkten, die zu Systemen von je 8 auf 64 ganz der Mannigfaltigkeit angehörigen Raumkurven 3. Ordnung liegen, und zwar derart, daß durch jeden der Punkte 8 dieser Raumkurven hindurchlaufen. — Automorphe Kollineationen und Korrelationen der Konfiguration. — Zum Schluß wird der Zusammenhang der Figur mit der Wirtingerschen Verallgemeinerung der Kummerschen Fläche behandelt. Die Frage nach der Art dieses Zusammenhanges kann vorläufig noch nicht vollständig beantwortet werden.

E. A. Weiss (Bonn).

Vries, Jan de: Ein aus kubischen Raumkurven gebildeter Komplex. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 37, 322—324 (1934).

Über den Komplex der kubischen Raumkurven k^3 , die durch drei gegebene Punkte A_1, A_2, A_3 gehen und die bzw. durch diese Punkte gelegten Geraden b_1, b_2, b_3 noch einmal treffen. Verf. untersucht die Systeme der ausgearteten Kurven dieses Komplexes und die Flächen, welche von den Kurven k^3 durch einen vorgegebenen Punkt von den Kurven k^3 , welche eine vorgegebene Gerade zweimal treffen, und von den Kurven k^3 , welche sich auf zwei vorgegebene Geraden stützen, gebildet werden.

G. Schaake (Groningen).

Vries, Jan de: Eine Abbildung der Kongruenz von kubischen Raumkurven durch drei Punkte, welche eine vorgegebene Gerade zweimal treffen und zwei anderen Geraden begegnen. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 37, 324—327 (1934).

Die kubischen Raumkurven q^3 , welche die Punkte A_1, A_2, A_3 enthalten, eine Gerade b zweimal schneiden und die Geraden c_1, c_2 bzw. in P_1 und P_2 treffen, werden abgebildet auf die Punkte einer Ebene E . Das Bild einer Kurve q^3 ist die Spur der Geraden $P_1 P_2$ in der Ebene E . Verf. untersucht die Abbildungen der Systeme von ausgearteten Kurven q^3 . Auch findet er mit Hilfe dieser Abbildung, daß die Kurven q^3 , welche sich auf eine gegebene Gerade stützen, eine Fläche 28. Ordnung und daß die Kurven q^3 , welche eine gegebene Ebene berühren, eine Fläche 54. Ordnung bilden.

G. Schaake (Groningen).

Mayor, John R.: A generalization of the Veronese and Steiner surfaces. Amer. J. Math. 56, 372—380 (1934).

Die Quadriken eines Raumes S_r lassen sich auf die Hyperebenen eines Raumes S_R , wo $R = \frac{1}{2} r(r+3)$ ist, linear abbilden; den Punkten des S_r entsprechen dann die Punkte einer Veroneseschen V_r^{2r} . Nach einigen allgemeinen Eigenschaften dieser V_r betrachtet Verf. ihre allgemeinen Projektionen auf einem Raume S_{r+1} ; und dann auch diejenigen besonderen Projektionen, die, analog der Steinerschen Fläche, mit der Enveloppengleichung $\sum \frac{1}{u_i} = 0$ dargestellt werden können; Verf. diskutiert die Lage des Projektionsraumes in diesem letzten Falle.

E. G. Togliatti (Genova).

● **Godeaux, Lucien:** Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls. (Actualités scient. et industr. Nr. 123. Exposés de géométrie. Publiés par E. Cartan. IV.) Paris: Hermann & Cie. 1934. 33 S. Frs. 10.—.

Die bekannten Rationalitätsbedingungen einer algebraischen Fläche, $p_a = P_2 = 0$, führen ganz natürlich zur Betrachtung derjenigen regulären Flächen, die $p_a = p_g = 0$ haben, ohne rational zu sein ($P_2 > 0$); der heutige Zustand der Untersuchungen über solche Flächen wird hier dargestellt. Es werden zunächst einige fundamentale Sätze der Theorie der algebraischen Flächen wiederholt; insbesondere über mehrkanonische Systeme und über Doppelebenen; mit Anwendungen im Falle, wo $p_a = p_g = 0$ und $P_2 > 0$ ist. Es folgt als erstes Beispiel von Flächen der betrachteten Art die Fläche von F. Enriques ($P_3 = 0$, $P_2 = 1$) in ihren verschiedenen bekannten projektiven Formen: F^6 die die Kanten eines Tetraeders als Doppelgeraden enthält, Doppelebene mit einer geeigneten Verzweigungskurve 8. Ordnung, Bild einer Involution 2. Ordnung ohne Doppelpunkte auf einer Fläche von den Geschlechtern 1, Bild der Hauptstrahlen eines ∞^3 Linearsystems von Quadriken. Es folgen die Beschreibung der Fläche von Castelnuovo ($p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = 1$, $P_2 = 1$) und der Ergebnisse von L. Campedelli über Doppelebenen mit einer Verzweigungskurve 8. oder 10. Ordnung. Schließlich die Untersuchungen des Verf. über zyklische und doppelpunktfreie Involutionen I_p , einer ungeraden Ordnung p , auf einer regulären Fläche mit $p_a = p - 1$ und $p^{(1)} > 1$; die Bildfläche von I_p hat eben $p_a = p_g = 0$; als Beispiel der Fall $P_2 = p^{(1)} = 2$, $P_3 = 4$.

E. G. Togliatti (Genova).

Plamitzer, Anton: Erzeugnisse einer Klasse Cremonascher Verwandtschaften 2. Grades zwischen Grundgebilden zweiter Stufe. J. reine angew. Math. 171, 173—192 (1934).

Synthetische Untersuchungen über einige Gebilde, die aus birationalen Transformationen zwischen Grundgebilden 2. Stufe hervorgehen. Es seien $\omega_0 \omega_1 \omega_2$ drei zusammenfallende Ebenen; eine Cremonasche Verwandtschaft zwischen ω_0, ω_1 und eine Kollineation zwischen ω_1, ω_2 führen zur Enveloppe der Geraden, die drei entsprechende Punkte enthalten. Ist ω_3 eine vierte mit ω_1, ω_2 zusammenfallende und kollineare Ebene, so bestimmt Verf. die Anzahl der Geraden, die 4 entsprechende Punkte enthalten. Sind $\omega_0 \omega_1 \omega_2 \omega_3$ (und ω_4) verschiedene Ebenenbündel statt Punktfelder, so erzeugen sie gewisse Flächen, Raumkurven (und Punktgruppen). (S. auch L. Berzolari, Enzykl. math. Wiss., III C 11, 2148—2149.)

E. G. Togliatti (Genova).

Waerden, B. L. van der: Zur algebraischen Geometrie. V. Ein Kriterium für die Einfachheit von Schnittpunkten. Math. Ann. 110, 128—133 (1934).

A purely algebraic proof of the following theorem, used frequently in algebraic geometry: if $|E_1|, |E_2|, \dots, |E_d|$ are d linear systems of $(d-1)$ -dimensional varieties on an irreducible algebraic variety V of dimension d , then the intersections of d generic varieties E_1, \dots, E_d , outside the base-points of each system $|E_i|$, are all simple. The well known special case $d = 1$ is proved first (a linear series g_n^1 on an irreducible algebraic curve is free of variable multiple points), and then the general theorem follows easily. The proof is based on elementary considerations of elimination theory, on the method of "relationstreue spezialisierung",

and makes use of the definition of intersection multiplicity given by the author in preceding paper (this Zbl. 7, 74; IV. this Zbl. 7, 421). *O. Zariski* (Baltimore).

Waerden, B. L. van der: Zur algebraischen Geometrie. VI. Algebraische Korrespondenzen und rationale Abbildungen. Math. Ann. 110, 134—160 (1934).

The author investigates the notion of an algebraic correspondence T between two algebraic varieties V and W from the point of view of elimination theory and gives complete algebraic proofs for a number of propositions which are at the very foundations of the theory of correspondences. T is defined in the usual manner as an algebraic variety of pairs of points (ξ, η) of V and W respectively. This defines directly only the generic pair (ξ, η) , while any special point pair (ξ', η') of T can be obtained from (ξ, η) by the method of "relationstreue Spezialisierung". This manner of defining special point pairs leads immediately to the conclusion that the points of W which correspond to an arbitrary point of V (in particular to a fundamental point of T) constitute an algebraic variety. This is not at all obvious if special point pairs (ξ', η') are defined by the customary method of limit processes. The equivalence of the two definitions follows from a theorem of Ritt (this Zbl. 7, 226). If V, W, T are irreducible of dimension a, c and q respectively, and if b (or d) is the dimension of the variety $W_{\xi'}$ (or $V_{\eta'}$) which corresponds to a generic point of V (or W), then it is proved that $a + b = c + d = q$ (principle of counting constants). By means of the lemma that the intersection of a variety M_r with k hypersurfaces does not contain isolated components of dimension $< r - k$ (proved by the author in a previous paper, this Zbl. 7, 74) the following theorem is proved: For any point ξ' of V every component $W_{\xi'}$ of $W_{\xi'}$ is of dimension $\geq b$, and the points ξ' for which $W_{\xi'}$ contains at least one component of dimension $\geq h$ (h a given number) constitute an algebraic variety. This shows in particular that the variety of the fundamental points of T on V is algebraic. For rational transformations (W a rational transform of V) it is proved moreover that if there exist on V fundamental points ξ' , then the singular point pairs (ξ', η') form an algebraic variety whose components are all of dimension $a - 1$. As an application of these general theorems the author gives new proofs of the principle of Plücker-Clebsch (see also a paper by Severi, this Zbl. 6, 244) and of the principle of conservation of the number, in its precise formulation due to Severi (this Zbl. 7, 75). Another application deals with linear systems $|E|$ of V_{a-1} 's on V , notably with the question of defining special members E' of $|E|$ the multiplicities of the components of E' , etc. Assuming that W , a rational transform of V , is of the same dimension as V , and that there are no fundamental points on W , the author studies the effect of the transformation on the intersection number of curves and V_{a-1} 's on V . As an application he derives the well-known fixed point formula of Schubert for algebraic series of sets of points in a projective space.

O. Zariski (Baltimore).

Differentialgeometrie:

Calugaréano, Georges: Sur la représentation intrinsèque des surfaces. Bul. Sec. Sci. Acad. Roum. 7, 574—579 (1934).

Als eine solche Darstellung betrachtet Verf. die Beziehung einer Fläche auf geodätische Polarkoordinaten (beliebigen Pols und beliebiger Anfangsrichtung). Es werden die 3 Fundamentalgleichungen der Flächentheorie mehrfach umgeformt; dabei werden die 3 zweiten Fundamentalgrößen ersetzt durch Gaußsche Krümmung, mittlere Krümmung und den Winkel einer Krümmungsrichtung mit einer Koordinatenrichtung. Es werden dabei einige bemerkenswerte, aber nicht neue Formeln über Flächen konstanter mittlerer Krümmung aufgestellt. Die Andeutungen am Schluß der Arbeit enthalten (wenn Ref. ihren Sinn verstanden hat) einen Trugschluß; es wird von Gleichungen (Integrabilitätsbedingungen) geredet, die Bedingungen für die Fundamentalgrößen ergeben sollen, während in Wahrheit jene Gleichungen vermöge vorangegangener Elimination aus andern Integrabilitätsbedingungen Identitäten sind. *Cohn-Vossen*

Dop, A. van: Über Flächen mit der Eigenschaft, daß es eine Beziehung gibt zwischen den beiden affinen Hauptkrümmungen. *Nieuw Arch. Wisk.* 18, 8—19 (1934) [Holländisch].

Die n. u. h. Bedingung dafür, daß die asymptotischen Linien der beiden Fokalflächen einer Affinnormalenkongruenz korrespondieren (J. Haantjes, Dissertation Leiden), wird etwas umgeformt. Für den Fall, daß zwischen den beiden Hauptkrümmungen eine Beziehung besteht, erhält diese Bedingung die einfache Gestalt

$$\frac{1}{w_1 R_3} + \frac{1}{w_3 R_1} = \frac{2}{R_1 R_2},$$

wo $1/w_1$ und $1/w_2$ die geodätischen Krümmungen der Krümmungslinien sind, definiert mittels der von W. van der Woude und J. Haantjes benutzten induzierten Übertragung (Über das bewegende Achsensystem im affinen Raum. *Proc. Amsterdam* 1933, 41—51, dies. Zbl. 6, 222), während $1/R_1$ und $1/R_2$ die geod. Krümmungen der Krümmungslinien sind, definiert mittels der zu dem Fundamentaltensor gehörigen Übertragung. Es werden einige Beispiele gegeben.

J. Haantjes (Delft).

Su, Buchin, and Asajiro Ichida: On certain cones connected with a surface in the affine space. *Jap. J. Math.* 10, 209—216 (1934).

Une tangente t au point P d'une surface σ donnée, il existe un faisceau de quadriques Q (dit de Moutard) ayant un contact du second ordre au point P avec σ et dont les trois tangentes de la ligne d'intersection avec σ comprend la droite t deux fois prise. Il en existe deux faisceaux Q_1, Q_2 (dits associés le long de t) dont les trois tangentes mentionnées sont composées de la droite t une fois prise et de deux autres confondues. Les trois droites l, l_1, l_2 lieux de centres des quadriques d'un faisceau Q_i sont situées dans un plan π (le plan de Transon de t). La tangente t variant, elles engendrent le même cône Γ_4 dont π est le plan tangent le long de l . Chaque faisceau Q_i contient un paraboloïde Q'_i . Les paraboloïdes Q' qui correspondent aux trois tangentes de Darboux se coupent en P et encore en un seul point M situé sur la normale affine de σ et dont la distance affine MP est égale à l'inverse de l'invariant de M. Pick.

S. Finikoff (Moscou).

Pantazi, Al.: Sur les couples de congruences stratifiables par familles de surfaces réglées. *Bull. Math. Soc. Roum. Sci.* 36, 3—25 (1934).

Le couple de congruences K, K' est stratifiable s'il existe deux familles de surfaces S, S' dont les plans tangents aux points où elles rencontrent le rayon de K , passent par le rayon homologue de K' et vice versa. L'auteur applique la méthode des formes extérieures de M. Cartan en examinant les couples dont les surfaces S, S' sont réglées. Il arrive aux congruences W à focales réglées qui sont stratifiables avec elles mêmes — la configuration citée par l'auteur du réferat [*Ann. Scuola norm. super. Pisa* 2, 75 (1933); ce Zbl. 6, 79]. Les rayons de la congruence ainsi que les génératrices de S, S' se répartissent en ∞^1 demiquadriques ayant comme support la même famille de quadriques Q qui enveloppent les nappes focales de K, K' . Des cas particuliers intéressants: les couples de congruences paraboliques dont les quadriques Q se confondent avec les quadriques de Lie de la seule nappe focale de K et de K' , les couples conjugués dont les développables de K, K' correspondent etc.

S. Finikoff (Moscou).

Pototzki: Détermination des complexes dont toutes les congruences sont W . *C. R. Acad. Sci., Paris* 199, 12—14 (1934).

Il est bien connu que toutes les congruences d'un complexe linéaire sont W . L'auteur démontre que cette propriété caractérise le complexe linéaire.

S. Finikoff (Moscou).

● **Godeaux, Lucien:** La théorie des surfaces et l'espace réglé. (Géométrie projective différentielle.) (Actualités scient. et industr. Nr. 138. Exposés sur l'analyse mathématique et ses applications. Publiés par J. Hadamard. II.) Paris: Hermann & Cie. 1934. 36 S. Frcs. 12.—.

L'auteur expose les nombreux notes et mémoires qu'il a rédigés depuis 1928 sur l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface et sur les divers problèmes qui s'y rattachent. Contenu: Représentation des tangentes d'une surface (x) dans E_3 par les points

de l'hyperquadrique Q d'un espace linéaire S_5 . Deux réseaux, les images des tangentes asymptotiques de (x) , consécutifs dans une suite L de Laplace. Suite de quadriques dont deux quadriques consécutives se touchent en quatre points, qui correspond en E_7 à deux suites de Laplace de S_5 polaires par rapport à Q . Suite de quadriques qui correspond à la suite L et dont la première quadrique est celle de Lie de (x) . Surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux ou trois points caractéristiques. Propriétés des congruences engendrées par leurs communes directrices de Wilczynski. Suite de quadriques attachée à une congruence W et dont la première quadrique se confond avec l'ensemble de deux plans focaux. Suite de quadriques attachée à deux congruences W ayant une nappe focale commune. Surfaces dont les asymptotiques sont conservées sur les cinq nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie. *S. Finikoff* (Moscou).

Matsumura, Sôji: Imaginäre Kurven mit der Krümmung Null. Tôhoku Math. J. **39**, 233—234 (1934).

Takasu, Tsurusaburo: Differentialkugelgeometrie. XII. Über die konforme Verallgemeinerung der Radonschen Variationsprobleme und ihre Anwendung auf die Bestimmung der Extremalen des Liebmannschen Parameters. Jap. J. Math. **10**, 177 bis 182 (1934).

Der Verf. hat in Band 1 seiner Differentialkugelgeometrie ein Radonsches Variationsproblem für die konforme Geometrie erweitert. Der Ausdruck $J = \int \varphi \left(\frac{1}{\rho} \right) d\sigma$ soll zu einem Extrem gemacht werden. Darin bedeuten $\frac{1}{\rho}$ die von Takasu verwendete Dualkrümmung in der konformen Geometrie, φ eine vorgegebene Funktion und $d\sigma$ das Bogenelement einer Kugelschar, durch welche zwei gegebene Kugeln des konformen Raumes verbunden werden sollen. (Vgl. Takasu, Differentialkugelgeometrie I, 341 ff.). Die Extremalen dieses Variationsproblems sind nach der vorliegenden Arbeit durch Quadraturen auffindbar und in ihr angegeben. Als zweites Problem werden die Extremalen für den Liebmannschen Parameter t angegeben, für den der Verf. 8 Ausdrücke angibt. Auch hier ist die Lösung durch Quadraturen möglich. (XI. vgl. diese Zbl. **7**, 326.)

H. Schatz (Innsbruck).

Blaschke, W., ed E. Bompiani: Ragionamenti enumerativi su tessuti misti. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **19**, 469—473 (1934).

Der Begriff: „Rang“ (vgl. W. Blaschke, Topologische Fragen der Differentialgeometrie 48, 49; dies. Zbl. **7**, 78) eines Gewebes wird definiert für „gemischte Gewebe“ im Raum, die sowohl Kurvenscharen wie Flächenscharen enthalten. Es werden dann Gewebe untersucht, die aus n Flächenscharen und einer Kurvenschar bestehen, und für die niedrigsten Werte von n wird der Maximalwert p für den Rang bestimmt und durch Beispiele gesichert. Man findet:

$$n = 1, p = 1; n = 3, p = 2; n = 4, p = 4; n = 5, p = 6; n = 6, p = 8.$$

Für $n = 6$ tritt allerdings eine einschränkende Forderung auf, die unter anderm mehr solche Gewebe ausschließt, die bestehen aus sechs Scharen eines Flächen-8-Gewebes vom maximalen Rang 9 und die Schnittkurven der beiden restlichen Scharen, und die definitionsgemäß den Rang 9 hätten. — Für $n = 3$ erhält man die sog. Diagonalkurvengewebe. Eine Erweiterung der Ergebnisse in T 57 (vgl. nachst. Referat; Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. **10**, 317).

G. Bol (Hamburg).

Bompiani, Enrico: Topologische Fragen der Differentialgeometrie. LVII. Su tessuti misti di superficie e di curve. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. **10**, 317—324 (1934).

Vgl. W. Blaschke und E. Bompiani: Ragionamenti enumerativi su tessuti misti; vorst. Referat. Es wird der Höchststrang bestimmt von Geweben aus n Flächenscharen und einer Kurvenschar. Dieser bestimmt sich folgendermaßen: wenn k_0 die ganze Zahl ist, die den Ungleichungen

$$(2k_0 + 5)^2 \geq 8n + 1 \quad (2k_0 + 3)^2 < 8n + 1$$

genügt, so ist er

$$(n-1)(k_0+1) - \frac{1}{6} k_0(k_0+1)(k_0+5).$$

Dies gilt nur unter gewissen Allgemeinheitsbedingungen, wovon die wichtigste so lautet: Seien R^i die Funktionen, die in den Relationen zu der Kurvenschar gehören, so sollen diese nicht sämtlich einer linearen Differentialgleichung von der Ordnung $\leq k_0$ genügen, die kein Glied mit R selbst (undifferenziert) enthält. — Durch ein Beispiel wird der oben angegebene Rang sichergestellt. — Läßt man die Nebenbedingung fallen, so kann man leicht wieder zu den Ergebnissen über Flächen- n -Gewebe gelangen (T 48, T 49, dies. Zbl. 7, 78).

G. Bol (Hamburg).

Levy, Harry: Linearly connected spaces and ennuples of curves. Amer. J. Math. 56, 381—395 (1934).

Wenn $u^{\nu}_a, \bar{u}^{\nu}_a$ zwei reziproke vektorielle n -Beine sind (also $u^{\nu}_a \bar{u}^a_{\lambda} = \delta^{\nu}_{\lambda}$, $\bar{u}^{\nu}_a u^a_{\lambda} = \delta^{\nu}_{\lambda}$) und $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ die Konnexionskoeffizienten, so führt der Ansatz

$$\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = A^b_{ac} u^{\nu}_b \bar{u}^a_{\mu} \bar{u}^c_{\lambda} - \bar{u}^a_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} u^{\nu}_a$$

zu den verallgemeinerten Riccischen Rotationskoeffizienten A^b_{ac}

$$A^b_{ac} = \bar{u}^b_{\nu} u^{\nu}_c \bar{u}^{\lambda}_a V_{\lambda} u^{\nu}_b,$$

welche in den Rechnungen mit anholonomen Koordinaten dieselbe Rolle spielen, wie im holonomen Falle die $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$. Der Verf. benützt die A um einige Differentialinvarianten und Theoreme anzugeben, die in der „holonomen“ Rechnung bekannt sind: Die Ausrechnung der anholonomen Bestimmungszahlen der Krümmungsgröße und der Torsionsgröße usw. Wegen des „anholonomen“ Theorems von Fermi vgl. Dienes: Sur un théorème de M. Fermi, Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 18, 369—372 (1933); dies. Zbl. 8, 180 [und auch Bortolotti: Riferimenti geodetici lungo più linee, nelle varietà a connessione affine. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 19, 556—560 (1934); vgl. nachst. Referat].

Hlavatý (Praha).

Bortolotti, E.: Riferimenti geodetici lungo più linee, nelle varietà a connessione affine. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 19, 556—560 (1934).

Die verallgemeinerten Riccischen Rotationskoeffizienten A (siehe vorstehendes Referat über die Arbeit von Levy) können bekanntlich [Dienes, Sur un théorème de M. Fermi, Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 18, 369—372 (1933); dies. Zbl. 8, 180] längs einer vorgegebenen Kurve mittels einer passenden Wahl des Fundamental- n -Beines annulliert werden. Da die Aufsuchung des betreffenden n -Beines nur von der Umgebung zweiter Ordnung (längs der Kurve) abhängt, kann man dem n -Beine noch weitere Bedingungen vorschreiben. Der Verf. findet z. B.: Die notwendige und hinreichende Bedingung, damit die A sich längs r Kurven ($2 \leq r \leq n$) (welche von einem Punkte P linear unabhängig ausgehen) annullieren können, ist die Annullierung der Krümmung des Raumes in der Richtung des gemeinsamen Tangential- r -Vektors im Punkte P .

Hlavatý (Praha).

Pastori, Maria: Sulle equazioni della meccanica dei mezzi isotropi non euclidei. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 19, 566—572 (1934).

Setzt man $V_{[i} v_{j]} = v_{ij}$, so ist einerseits $2V^j V_{[i} v_{j]} = 2V^j v_{ij}$ andererseits nach der bekannten Regel

$$2V_{[j} V_{i]} v^j = -K_{ik} v^k. \quad (K_{ik} = K_{j;ik}^j)$$

Daraus folgt insbesondere für die Differenz der beiden Divergenzen:

$$V^j V_j v_i - V_i V_j v^j = -2V^j v_{ij} - R_{ij} v^j.$$

Diese Gleichung wird an einigen Beispielen erläutert. (Nach den bekannten algebraischen Regeln läßt sich dabei v_{ij} mittels eines $(n-2)$ -Vektors ausdrücken, der nur von $V_j v_i$ und von dem Riccischen $\varepsilon^{i_1 \dots i_n}$ abhängt.)

Hlavatý (Praha).

Topologie:

Goeritz, Lebrecht: Bemerkungen zur Knotentheorie. Abh. math. Semin. Hamburg Univ. 10, 201—210 (1934).

Es werden Kreisprojektionen angegeben, die sich mittels der elementaren Abänderungen nur nach Einführung weiterer Doppelpunkte in die doppelpunktfreie Projektion überführen lassen (§ 1). Eine quadratische Form mit ganzen rationalen Koeffizienten ist rational äquivalent zu einer Form, die nur rein quadratische Glieder enthält, deren Koeffizienten Quotienten aus gewissen Hauptminoren der ursprünglichen Koeffizientenmatrix sind (§ 2). Der letzte Paragraph enthält eine Berichtigung, welche fastalternierende Knoten, insbesondere die Kennzeichnung des Kreises unter ihnen betrifft.

Kurt Reidemeister (Königsberg i. Pr.).

Reidemeister, Kurt, und Hans Georg Schumann: L-Polynome von Verkettungen. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 10, 256—262 (1934).

§ Sei die Gruppe einer Verkettung von zwei Kurven $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$, \mathfrak{R} ihre Kommutatorgruppe, \mathfrak{K} die Kommutatorgruppe von \mathfrak{R} . $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ ist Abelsche Gruppe von zwei Erzeugenden unendlicher Ordnung; als Repräsentanten der Restklassen von \mathfrak{G} nach \mathfrak{K} lassen sich die Elemente $C_1^{\alpha_1} C_2^{\alpha_2}$ wählen, wobei die α_i alle ganzen Zahlen durchlaufen und die C_i Kurven entsprechen, die die \mathfrak{C}_i einmal positiv umschlingen. Es lassen sich Elemente T_ρ ($\rho = 1, \dots, r$) aus \mathfrak{K} angeben, aus denen sich durch Transformation mit den $C_1^{\alpha_1} C_2^{\alpha_2}$ und Komposition der Transformaten alle Elemente aus $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}'$ zusammensetzen lassen. Ist T ein Element aus $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}'$, so schreibe man $C_i^{\pm 1} T C_i^{\mp 1} = T^{x_i^{\pm 1}}$ ($i = 1, 2$) und allgemein $T^{\varphi(x_1, x_2)} = \prod_{\alpha, \beta} (T^{h_{\alpha, \beta}})^{x_1^\alpha x_2^\beta}$, wobei $\varphi = \sum h_{\alpha, \beta} x_1^\alpha x_2^\beta$ ein Polynom

mit ganzzahligen Koeffizienten in den $x_i^{\pm 1}$ ist. Es gibt endlich viele Relationen $\prod_{(\rho)} T_\rho^{\varphi_{\rho, \nu}(x_1, x_2)} = 1$ ($\nu = 1, \dots, n$), aus denen alle zwischen den symbolischen Po-

tenzen der T_ρ bestehenden Relationen folgen. Die von 1 verschiedenen Elementarteile der Matrix $(\varphi_{\rho, \nu})$ sind dann (wegen der speziellen Wahl der C_i) Invarianten der Verkettung (abgesehen von einem Faktor $x_1^\alpha x_2^\beta$). Für gewisse Viergeflechtsverkettungen (vgl. nächst. Referat) reduziert sich die Matrix $(\varphi_{\rho, \nu})$ auf ein Polynom; dieses kann dazu dienen, auch solche Viergeflechte als wirklich verkettet nachzuweisen, für die die Verschlingungszahl und die Verkettungszahlen (s. K. Reidemeister, Knotentheorie. Erg. d. Math. 1, 1, Kap. 2, § 1, Berlin 1932) wie bei zwei unverketteten Kurven verschwinden. — Das oben entwickelte Verfahren läßt sich durch ein allgemeines gruppentheoretisches Prinzip auch für Verkettungen von mehr als 2 Kurven rechnerisch brauchbar gestalten. Ist \mathfrak{G} eine Gruppe, die durch einen Homomorphismus $A(\mathfrak{G})$ auf eine Faktorgruppe $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}/\mathfrak{U}$ von \mathfrak{G} abgebildet wird, so lassen sich in dem freien Produkt \mathfrak{P} von \mathfrak{G} und \mathfrak{F} Erzeugende und definierende Relationen für die kleinste invariante Untergruppe \mathfrak{J} angeben, die die Elemente $G^{-1} \cdot A(G)$ (G durchläuft die Elemente von \mathfrak{G}) enthält. Für $\mathfrak{U} = \mathfrak{K}$ liefert die Untersuchung von $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}'$ ($\mathfrak{J}' =$ Kommutatorgruppe von \mathfrak{J}) das obige Verfahren.

Magnus (Frankfurt a. M.).

Bankwitz, Carl, und Hans Georg Schumann: Über Viergeflechte. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 10, 263—284 (1934).

Die Knotengruppe der sog. Viergeflechte ist zu einer Diedergruppe isomorph. Bildet man die zugehörige Überlagerung, so entsteht ein Raum mit der Identität als Fundamentalgruppe; die über dem Knoten liegenden Kurven bilden eine Verkettung, deren Verschlingungszahlen, anknüpfend an Math. Z. 29, 713, berechnet werden können. Mit ihrer Hilfe lassen sich z. B. die Knoten 7_4 und 9_2 sowie die Knoten 8_{14} und 9_8 der Tabelle von Alexander und Briggs (Ann. of Math. 28, 562) als verschieden nachweisen. Alle Viergeflechte besitzen eine alternierende Projektion; die Knoten unter ihnen sind symmetrisch, d. h. in den invers gerichteten deformierbar.

Kurt Reidemeister (Königsberg i. Pr.).

Burau, Werner: Kennzeichnung der Schlauchverkettungen. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 10, 285—297 (1934).

Einer Singularität einer algebraischen Kurve läßt sich eine bestimmte Verkettung von Schlauchknoten zuordnen, deren topologischer Typus durch die charakteristischen Zahlen der Puiseuxentwicklungen bestimmt ist. Falls diese Verkettung ein Knoten ist, so lassen sich nach Burau (vgl. dies. Zbl. 6, 34) aus dem topologischen Typus desselben umgekehrt die charakteristischen Zahlen der Puiseuxentwicklung bestimmen. In der vorliegenden Arbeit wird dasselbe für den allgemeinen Fall gezeigt, indem derselbe auf den Fall einer Verkettung von zwei Schlauchknoten zurückgeführt und eine solche Verkettung mit Hilfe des L -Polynoms von Verkettungen charakterisiert wird.

Kurt Reidemeister (Königsberg i. Pr.).

Reidemeister, Kurt: Homotopiegruppen von Komplexen. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 10, 211—215 (1934).

Es bezeichne C einen n -dimensionalen Komplex mit bestimmter Zellteilung, U den universellen Überlagerungskomplex, \mathfrak{G} die Gruppe der Deckbewegungen von U , g einen Normalteiler von \mathfrak{G} , U_g den Überlagerungskomplex von C , der aus U durch Identifizieren der hinsichtlich g äquivalenten Zellen entsteht. Eine k -Kette von U , d. h. eine ganzzahlige Linearkombination von k -dimensionalen orientierten Zellen in U , heißt geschlossen mod g , wenn die entsprechende Kette von U_g geschlossen ist. Die mod g geschlossenen Ketten bilden eine Gruppe \mathfrak{R}_g^k , während die Gesamtheit der nullhomologen k -Ketten von U eine Untergruppe \mathfrak{R}_0^k von \mathfrak{R}_g^k bildet. Dann wird die Faktorgruppe $\mathfrak{R}_g^k/\mathfrak{R}_0^k = \mathfrak{S}^k$ als die k -te Homotopiegruppe des Komplexes C erklärt, wobei die Faktorgruppen $\mathfrak{R}_g^k/\mathfrak{R}_0^k = \mathfrak{S}_g^k$ der Gruppe \mathfrak{S}^k aufgeprägt gedacht werden. Die Gruppen \mathfrak{S}^k und \mathfrak{S}_g^k lassen sich als Gruppen mit Operatoren auffassen, wenn man als Operatorenbereich den Ring aller endlichgliedrigen Ausdrücke $\sum n_i \gamma_i$ benutzt, wo n_i ganze Zahlen und γ_i die Decktransformationen von U sind. Bei Unterteilung des Komplexes C ändern sich die Gruppen \mathfrak{S}^k und \mathfrak{S}_g^k in bestimmter algebraisch faßbarer Weise. Diejenigen Eigenschaften der Gruppen, die von diesen Änderungen nicht berührt werden, sind dann topologische Eigenschaften des Komplexes C . — Gewisse Faktorgruppen der \mathfrak{S}_g^k sind die Homologiegruppen mit Operatoren, das sind die Homologiegruppen von U_g , wenn man als Operatoren die Automorphismen benutzt, die durch die Decktransformationen von U induziert werden. Diese Gruppen sind in speziellen Fällen bereits in der Knotentheorie, z. B. bei den unendlichblättrigen zyklischen Knotenüberlagerungen, gebräuchlich.

H. Seifert (Dresden).

Reidemeister, Kurt: Homotopiegruppen und Schnittrelationen. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 10, 298—304 (1934).

Ist C eine mit dualen Zellteilungen versehene n -dimensionale Mannigfaltigkeit, so gibt es zu irgend zwei Überlagerungsmannigfaltigkeiten U_1 und U_2 eine kleinste Überlagerungsmannigfaltigkeit U_3 , die sowohl U_1 als auch U_2 überlagert. Einer geschlossenen k_1 -Kette $c_1^{k_1}$ auf U_1 entspricht nun eine geschlossene (evtl. unendliche) k_1 -Kette $C_1^{k_1}$ auf U_3 , die aus den sämtlichen über $c_1^{k_1}$ liegenden und mit denselben Vielfachheiten gezählten Zellen von U_3 besteht. Analog entspricht einer geschlossenen Kette $c_2^{k_2}$ auf U_2 die Kette $C_2^{k_2}$ auf U_3 . $C_1^{k_1}$ und $C_2^{k_2}$ haben dann eine bestimmte geschlossene Schnittkette der Dimension $k_1 + k_2 - n$, deren Homologieklass durch die Homologieklassen von $c_1^{k_1}$ und $c_2^{k_2}$ völlig bestimmt ist. Ist also \mathfrak{S}_i^l die Homologiegruppe der Dimension l von U_i , so entspricht hiernach jedem Elementpaar von $\mathfrak{S}_1^{k_1}$ und $\mathfrak{S}_2^{k_2}$ ein bestimmtes Element aus $\mathfrak{S}_3^{k_1+k_2-n}$. Diese Schnittrelationen lassen sich dazu benutzen, um den Schnitt zweier in C eingelagerten Pseudomannigfaltigkeiten zu beschreiben. Bei Kurven auf Flächen erhält man die bekannten Schnittklassen.

H. Seifert.

Borsuk, Karol: Über das Problem der topologischen Charakterisierung der euklidischen Sphären. Extrait de: Wiadom. mat. 38, 30 S. (1934) [Polnisch].

Ein metrischer Raum M heißt sphäroidal, falls jeder Punkt beliebige kleine Umgebungen U besitzt, so daß $M - U$ ein absoluter Retrakt (im Sinne des Verf., Fundam.

Math. 17, 152; vgl. dies. Zbl. 3, 27) ist. Die euklidische n -dimensionale Sphäre S_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) sowie das Fundamentalquader Q_ω des Hilbertschen Raumes sind sphäroidale Räume. Vermutlich gibt es außer den S_n keine sphäroidalen Räume endlicher Dimension; für $n = 0, 1, 2$ wird diese Vermutung bewiesen. Ein sphäroidaler Raum, dessen Dimension größer als eins ist, ist ein absoluter Umgebungsretrakt (im Sinne des Verf., Fundam. Math. 19, 220; vgl. dies. Zbl. 5, 265), dessen Poincarésche Wegegruppe sich auf das Einselement reduziert. Eine abgeschlossene Untermenge A eines n -dimensionalen sphäroidalen Raumes M zerlegt M dann und nur dann, falls die $(n - 1)$ -te Bettische Zahl von B positiv ist. Wenn ein n -dimensionales Polyeder M sphäroidal ist, so sind die Bettischen Zahlen von M gleich denen von S_n . Die kombinatorischen Eigenschaften der sphäroidalen Räume gelten auch für allgemeinere Räume M , die durch die folgende Eigenschaft definiert werden: Jeder Punkt besitzt beliebig kleine Umgebungen U so, daß $M - U$ ein kompakter Raum ist, dessen sämtliche Bettische Zahlen verschwinden. Einen Teil seiner Ergebnisse hatte Verf. bereits in den Erg. math. Kolloqu. 1933, H. 5, 26—27 mitgeteilt. Čech (Brno).

Borsuk, K., et S. Mazurkiewicz: Sur les rétractes absolus indécomposables. C. R. Acad. Sci., Paris 199, 110—112 (1934).

Eine Teilmenge M eines Raumes R heißt Retrakt von R , wenn eine eindeutige stetige Abbildung f von R auf M existiert, so daß $f(p) = p$ für jeden Punkt aus M gilt. Wenn die Menge M für jeden sie enthaltenden Raum bzw. für eine gewisse Umgebung in jedem sie enthaltenden Raum ein Retrakt ist, so heißt M ein absoluter Retrakt bzw. ein absoluter Umgebungsretrakt. Verff. konstruieren im R_3 einen zweidimensionalen absoluten Retrakt bzw. absoluten Umgebungsretrakt, der nicht Summe von endlichvielen echten Teilkontinua mit verschwindender erster Bettischer Zahl ist.

Nöbeling (Erlangen).

Mazurkiewicz, Stefan: Sur un problème de M. Borsuk. C. R. Soc. Sci. Varsovie 26, 68—70 (1934).

In Beantwortung einer Frage von Borsuk wird gezeigt, daß jedes Kontinuum C des Euklidischen R_{n+1} , das den R_{n+1} zerlegt und in ihm durch beliebig kleine Transformationen in zu C fremde Mengen übergeführt werden kann, eine Cantorsche Mannigfaltigkeit ist, d. h. durch keine höchstens $(n - 2)$ -dimensionale Teilmenge zerlegt werden kann.

Nöbeling (Erlangen).

● **Sierpiński, Waclaw:** Introduction to general topology. Translated by C. Cecil

Krieger. Toronto: Univ. of Toronto press 1934. X, 238 S., geb. \$ 4.—.

Es handelt sich um die Übersetzung eines 1928 in polnischer Sprache erschienenen Buches. — Die Stoffanordnung ist dadurch bestimmt, daß alle Sätze unter möglichst geringen Voraussetzungen bewiesen werden sollen. Jedes Kapitel enthält die Sätze, die aus den am Anfang des Kapitels formulierten Axiomen (und den vorhergehenden) gefolgt werden können. — Kapitel 1. Es sei K eine Menge beliebiger Elemente; in K seien gewisse Teilmengen als offen gekennzeichnet, so daß folgende 3 Axiome erfüllt sind: I. K ist offen; II. die leere Menge ist offen; III. die Summe beliebig vieler offenen Mengen ist offen. Es werden dann eingeführt die Begriffe der abgeschlossenen Menge, der in sich dichten Menge, der zusammenhängenden Menge, der stetigen Abbildung usw. und eine Reihe von einfachen Sätzen bewiesen. — Kapitel 2. Zu I—III werden hinzugenommen: IV. Sind p und q 2 Punkte aus K , so existiert eine offene Menge U , die p , aber nicht q enthält; V. der Durchschnitt zweier offener Mengen ist offen. Es werden die kompakten und bikompakten Mengen definiert und der Cantorsche Durchschnittssatz und der Borelsche Überdeckungssatz bewiesen. Es wird gezeigt, daß K mit den Axiomen I—V eine Fréchet'sche Klasse (H) ist und umgekehrt. — Kapitel 3. VI. Es existiert eine Folge offener Mengen W_1, W_2, \dots , so daß jede offene Menge von K Summe von Mengen W_i ist (Abzählbarkeitsaxiom von Hausdorff). Es werden der Satz von Cantor-Bendixson und einige Mächtigkeitssätze bewiesen. — Kapitel 4. Axiom IV wird ersetzt durch: IVa. Sind p und q 2 Punkte aus K , so existieren zwei fremde offene Mengen, von denen die eine p , die andere q enthält (topologischer Raum mit Abzählbarkeitsaxiom). Es wird der Begriff der konvergenten Punktfolge definiert und gezeigt, daß die in Kapitel 1 definierten Begriffe des Häufungspunktes und der stetigen Abbildung in der bekannten Weise auch durch den Begriff der konvergenten Punktfolge definierbar sind. Das topologische Bild einer in sich kompakten Menge ist in sich kompakt. Das System aller offenen Mengen ist von der Mächtigkeit des Kontinuums. —

Kapitel 5. VII. Ist p ein Punkt von K und U eine p enthaltende offene Menge, so existiert eine offene Menge V mit $p \subset V$ und $\bar{V} \subset U$ (Regularität; Tychonoff). Es wird gezeigt: K ist normal, d. h. zu je zwei fremden abgeschlossenen Mengen P und Q existieren fremde offene Mengen $U \supset P$ und $V \supset Q$ (Urysohn). Jede perfekte kompakte Menge hat die Mächtigkeit des Kontinuums. Das Urysohnsche Lemma. — Kapitel 6. Der metrische Raum (Hausdorff). Wie üblich werden abgeschlossene und offene Mengen, Konvergenz usw. definiert. Dann erfüllt der Raum die Axiome I—V und ist normal. Ein normaler topologischer Raum mit Abzählbarkeitsaxiom ist homöomorph einer Teilmenge des Hilbertschen Raumes (Urysohn). Jeder abzählbare metrische Raum ist homöomorph einer Menge von rationalen Zahlen. — Kapitel 7. Der Raum sei metrisch und jede beschränkte Teilmenge kompakt. Es werden bewiesen der Satz von Bolzano-Weierstrass, das Cauchysche Konvergenzkriterium, der Erweiterungssatz von Lavrentieff. — Es folgt weiter eine ausführliche Darstellung der Theorie der Borelschen und der analytischen Mengen.

Nöbeling (Erlangen).

Mechanik.

Zaremba, S.: Sur la notion de force en mécanique. Bull. Soc. Math. France **62**, 110—119 (1934).

In der üblichen Behandlung der Mechanik werden Kräfte stets durch die Angabe ihres Angriffspunktes, ihrer Größe und ihrer Richtung beschrieben. In der Mechanik kontinuierlicher Medien, auf die Systeme von kontinuierlich vielen Kräften wirken (z. B. das System der Schwerkraft auf einen schweren Körper), reicht diese Art der Beschreibung nicht aus. Der Verf. führt daher außer den in der üblichen Weise beschreibbaren „konzentrierten Kräften“ noch Systeme von „nichtkonzentrierten Kräften“ ein. Zu ihrer Behandlung wird eine Reihe von Postulaten eingeführt, auf Grund derer Systeme von nichtkonzentrierten Kräften auf solche von konzentrierten Kräften zurückgeführt werden können. Eine Anzahl von Beispielen zur Illustration der Anwendung der Methode wird angegeben.

Fürth (Prag).

Mazet, R.: Sur une nouvelle définition des forces d'asservissement. C. R. Acad. Sci., Paris **198**, 1750—1753 (1934).

It is indicated how the artificial constraints of Beghin (liaisons d'asservissement. f. P. Appell, Mécanique **2**, 395—410 Gauthier-Villars 1931) may be approximately maintained by means of forces depending on the coördinates, their derivatives and the time, but independent of the given forces. Daniel C. Lewis jr. (Baltimore).

Loiseau, Jean: De l'impossibilité, sur l'espace à trois dimensions, de construire une mécanique rationnelle, permettant de représenter sûrement tous les phénomènes observables. C. R. Acad. Sci., Paris **198**, 1381—1383 (1934).

An argument designed to show that a three-dimensional euclidean space is inadequate for the geometrical mapping of physical events, and that the absolute trajectories of physical elements must in fact be regarded as situated in a four-dimensional space.

H. S. Ruse (Princeton).

Loiseau, J.: Les équations générales de la mécanique et l'électromagnétisme. C. R. Acad. Sci., Paris **198**, 1980—1982 (1934).

To construct a satisfactory rational mechanics the space E' appropriate for its representation should be of four dimensions, and of Euclidean connection if it is desired that the numerical material of experience should be utilisable (see the prec. review). In this paper the author shows that the general equations of mechanics have, in the space E' , precisely the form of the dynamical equations of an electromagnetic field. This, he says, removes the well known difficulties in rational mechanics concerning the electromagnetic field, and gives a simple explanation of the origin of that field.

H. S. Ruse (Princeton).

Obolensky, Dmitri: Über eine neue Fassung der dynamischen Grundgleichung. Tôhoku Math. J. **39**, 6—10 (1934).

Reasons are given for proposing the following law of motion:

$$P = m \frac{dv}{dt} + n \frac{dm}{dt} v + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{d^2m}{dt^2} \int v dt + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{d^3m}{dt^3} \iint v dt^2 + \dots,$$

where $m = m_t$ is the mass acted upon by the force P at time t , where v is the velocity and n is real and ≥ 1 . This yields the classical law if m is constant, or even if m is not constant and $n = 1$. n is supposed to be determined by the physical condition of the dynamical system and may even be variable with respect to t . D. C. Lewis jr.

García, Godofredo: Lagrange's equations and Hamilton's principle in classical and relativistic mechanics. C. R. Soc. Sci. Varsovie 26, 77—83 (1934) [Spanisch].

The treatment is essentially that of Levi-Civita (cf. his book, "The Absolute Differential Calculus", authorized translation by M. Long, pp. 287—298), but no restriction is made to forces derivable from a potential. The paper appears to the reviewer to contain several mistakes which might easily have been avoided. D. C. Lewis jr.

Anžur, H.: Sur un nouveau type de cas de mouvement du corps solide se ramenant aux quadratures. C. R. Acad. Sci. URSS 2, 284—287 u. franz. Text 287—290 (1934) [Russisch].

Unter Benutzung einer vom Verf. in früheren Noten [C. R. Acad. Sci., Paris 184 996 und 1114 (1927)] verwendeten Methode wird die Integration der Bewegungsgleichungen eines starren Körpers unter der Annahme behandelt, daß die äußeren Kräfte aus einem sich selbst parallel bleibenden und nur von den Lagekoordinaten des Körpers abhängigen Kräftepaar bestehen, während der Körper anfangs sich in Ruhelage befindet (letztere Bedingung kann durch eine etwas allgemeinere ersetzt werden). Wintner (Baltimore).

Burgatti, Pietro: Proprietà dei sistemi di forze il cui momento risultante è nullo rispetto a qualsiasi punto. Rend. Accad. Sci. Ist. Bologna, N. s. 36, 26—31 (1932).

Es wird hervorgehoben, daß ein bekannter [von B. Delaunay im Heidelberger Kongreßbericht (1904) veröffentlichter, vom Verf. versehentlich U. Wegner zugeschriebener] elementargeometrischer Satz über das Dreikörperproblem, der auf den Fall des ($n > 3$)-Körperproblems trivialerweise nicht übertragbar ist und kürzlich zusammen mit dem Fall $n = 4$ von U. Wegner [Math. Ann. 105, 632 (1931); dies. Zbl. 2, 415] mittels analytischer Geometrie durchgerechnet wurde, in durchsichtiger Beziehungen enthalten ist, die zwischen drei Vektoren bestehen (vgl. B. Delaunay a. a. O.), und daß der Fall $n = 4$ analog behandelt werden kann. Wintner.

Hinrichsen, J. J. L.: On the problem of n bodies. Trans. Amer. Math. Soc. 36, 306—314 (1934).

Nach einem von Sundman wiederentdeckten Resultat von Weierstraß ist das Verschwinden des Drehmomentes eine notwendige Bedingung für einen ternären Stoß im Dreikörperproblem, und zwar ist ein solcher stets ein effektiver ternärer Stoß (Painlevé). Im Falle des ($n > 3$)-Körperproblems liegen die Verhältnisse bekanntlich recht kompliziert. Der Verf. nimmt zwischen den Integrationskonstanten und den Massen passend gewählte Ungleichungen an und leitet so für den Fall $n > 3$ verschiedene Einzelresultate her, die sich methodisch an die von Birkhoff in seinem Buch gegebene Behandlung des Dreikörperproblems anschließen. Wintner (Baltimore).

Levi-Civita, Tullio: The secular effect of tides on the motion of planetary systems. Amer. Math. Monthly 41, 279—296 (1934).

Die Arbeit bringt eine zusammenfassende und durchsichtige Herleitung und in manchen Punkten ins einzelne gehende Weiterführung der schönen kosmologischen Resultate von Krall (wegen Zitate vgl. dies. Zbl. 8, 376), die auf des Verf. klassisch gewordener Theorie der stationären Bahnen beruhen. Diese Theorie wird in der vorliegenden Arbeit nicht von vornherein als bekannt vorausgesetzt. Wintner.

Maruhn, Karl: Über einige Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, auf deren Oberflächen singuläre Punkte liegen. Math. Z. 38, 747—776 (1934).

Die Arbeit bringt Verfeinerungen der Modelle, mittels derer Lichtenstein [Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig 80, 35—68 (1928); auch Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, Berlin, 1933, 158—165; vgl. a. dies. Zbl. 7, 181] und der Verf. [Math. Z. 32

300—320 (1931) und 37, 463—478 (1933); dies. Zbl. 1, 73 und 7, 260] die mathematische Möglichkeit der Laplaceschen Urnebelhypothese sichergestellt haben. Einerseits werden jetzt die punktförmigen Attraktionszentra nicht mehr von gleicher Masse angenommen, wodurch eine Symmetrieebene der Konfiguration verlorengeht, was die Durchführung des Existenzbeweises erschwert; es wird auch ein Grenzfall dieses Modells diskutiert. Andererseits wird das Modell in interessanter Weise dadurch modifiziert, daß die punktförmigen Attraktionszentra durch ein Jacobisches Ellipsoid ersetzt werden. Die Konvergenz- und Existenzbeweise werden mittels der von Lichtenstein ausgebildeten Methoden geführt.

Wintner (Baltimore).

Astronomie und Astrophysik.

Jekhowsky, Benjamin: Sur quelques relations nouvelles entre les constantes de Gauss et sur les formules différentielles que l'on rencontre dans les problèmes de correction des orbites des petites planètes. Astron. Nachr. 252, 241—246 (1934).

Ausgehend von den bekannten, in den Lehrbüchern enthaltenen Beziehungen zwischen den Gaußschen Konstanten einer Planetenbahn einerseits und den ekliptikalen oder äquatorealen Elementen der Bahn andererseits sowie von den Kontrollbeziehungen, die zwischen den Gaußschen Konstanten selbst bestehen, entwickelt Verf. eine Reihe von neuen, bisher noch nicht veröffentlichten Beziehungen. Anschließend werden auch Differentialformeln entwickelt, die die Variationen der Gaußschen Konstanten mit denen der Bahnelemente in Verbindung setzen. K. Stumpff.

Eigenson, M.: On the central forces of attraction and repulsion in a gravitational problem of two bodies of variable mass. C. R. Acad. Sci. URSS 2, 291—293 u. engl. Text 294—296 (1934) [Russisch].

Elementare Betrachtungen über Resultate einer früheren Arbeit des Verf. in Russ. Astron. J. 10, Nr 2 (1933); dies. Zbl. 8, 135. Anwendung auf ein Übersystem von Nebeln, dessen Zentralsystem (die Milchstraße) überwiegende Maße habe, zur Deutung der Proportionalität von Radialgeschwindigkeit und Entfernung. Heckmann.

● Ten Bruggencate, P., E. F. Freundlich, W. Grotrian, H. Kienle und A. Kopff: Zur Erforschung des Weltalls. Acht Vorträge über Probleme der Astronomie und Astrophysik. Hrsg. v. W. Grotrian u. A. Kopff. Berlin: Julius Springer 1934. X, 286 S. n. 153 Abb. RM. 18.—.

Contents: I. A. Kopff, The significance of astronomical methods for modern astronomy. II. H. Kienle, The physical characteristics of the stars. III. H. Kienle, The internal constitution of the stars. IV. W. Grotrian, The sun. V., VI. E. F. Freundlich, The constitution of the stellar system. VII. W. Grotrian, Luminous objects in interstellar space. VIII. P. ten Bruggencate, Stellar evolution. The lectures provide a semi-popular account of the problems of modern astrophysics, and give a fairly complete survey. They do not put forward any new theories or methods, but some topics discussed, e. g. the expansion of the universe, in particular Milne's theory, and the origin of the nebular lines, have not previously received much attention in books of this type. On the other hand it fails for instance to give much account of the work of Milne and his school on stellar constitution, and it does not mention the work of Jeffreys on the origin of the solar system. The book supplies short bibliographies for further reading, and it contains many beautifully reproduced illustrations.

W. H. McCrea (London).

Boneff, N.: Un univers en expansion euclidienne. Astron. Nachr. 252, 109—116 (1934).

Anwendung des Neumannschen Potentials $\Phi(r) = Ae^{-\alpha r} \cdot r^{-1}$ auf das Bewegungsproblem der außergalaktischen Nebel. — Dem Milchstraßensystem wird eine ausgezeichnete Stellung eingeräumt.

Heckmann (Göttingen).

Wurm, Karl: Beitrag zur Deutung der Vorgänge in Kometen. I. Z. Astrophys. 281—291 (1934).

The paper discusses the behaviour of the molecular spectra of CN, C₂, CO⁺ and N₂⁺ in comets. Of these the CN and C₂ emissions are confined to the head of the comet while those of CO⁺ and N₂⁺ mostly occur only in the tails. After giving an estimation of the gas density in cometary heads, it is shown how these phenomena can be understood when the ionizing and dissociating influence of the solar radiation field is taken into account. Further, it is shown how, from the same point of view, the contraction of the head of a comet on approaching the perihelion and its subsequent expansion may be explained. It is also shown how, in further pursuit of the same ideas, the frequently observed division of the cometary head in several luminous layers can be understood. Finally, the form of comets is briefly discussed. A more elaborate treatment of this problem is, however, reserved for a later paper. It is much to be regretted that the present state of cometary observations and the incomplete knowledge of the above mentioned band spectra do not allow of a more exact discussion of the ideas advanced in this paper.

Steensholt (Oslo).

Alter, Dinsmore: A statistical study of the solar atmosphere with application to the evolution of planets. Astrophys. J. 79, 498—510 (1934).

A serious difficulty for any hypothesis of the formation of planets from a single star is the required increase in moment of momentum. The paper attempts to show how this increase is secured through radiation pressure, the photons increasing the viscosity of the stellar gas and therefore tending toward producing rotation with constant angular velocity as we go out from the centre of the star. The assumption is made that the gain in angular momentum will increase the areal velocity of an atom or an aggregate of atoms in the equatorial solar atmosphere. This areal acceleration and the observed variations of solar radiation are then applied to explain the changing coronal forms. Further, a tentative explanation of the sun's equatorial acceleration is put forward, and, finally, the formation of planetesimals is discussed; once having been formed, the grouping of these planetesimals into planets is assumed to follow the Chamberlain-Moulton process. In developing his ideas, the author believes to have framed a plausible hypothesis for the formation of the solar system, avoiding the assumption of a grazing collision between two stars and using only phenomena observed on the sun at the present time.

Steensholt (Oslo).

Ganguli, A.: On stellar absorption and opacity. Indian J. Physics a. Proc. Indian Assoc. Sci. 8, 353—364 (1934).

In a previous paper the author has derived [see Indian J. Physics 6, 453 (1931)] Kramers' formula for X ray absorption from considerations of an equilibrium between free and bound electrons. In the present paper, this method is extended and applied to the derivation of formulae for the absorption and opacity coefficients for the non-relativistic (classical and degenerate) and also for the relativistic case. One of the author's results is that the opacity coefficient for the non-relativistic degenerate case is independent of density, and for the relativistic case it is constant, being independent of temperature as well. Formulae for the opacity coefficients for the bound-free transitions are also derived; they are found to be negligible for the degenerate case.

Steensholt.

Sen, N. R.: On the equilibrium of an incompressible sphere. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 94, 550—564 (1934).

Für das Problem der inkompressiblen Flüssigkeitskugel in der allgem. Rel.-Th. wird die Bedingung der Inkompressibilität, einem Vorschlage Eddingtons folgend, formuliert durch $T = \delta_k^i T_i^k = \text{konst.}$ und nicht, wie bei Schwarzschilds Behandlung, durch $T_4^4 = \text{konst.}$ ($T_i^k = \text{Impuls-Energie-Tensor}$). Man wird geführt auf nicht geschlossenen integrierbare Differentialgleichungen, deren numerische Integration folgende sonderbare Hauptresultate liefert: Bei gegebener Dichte existiert eine Kugel von größtem Radius und eine von größter Masse. Beide sind verschieden. Bei gegebener

ichte und gegebenem Radius gibt es zwei Kugeln mit verschiedener Masse und verschiedenem Mittelpunktsdruck. — Ist die Dichte $= 1$, so ist $P_{\max} = 2,3 \cdot 10^8$ km, ist $\rho = 3 \cdot 10^{12}$, so ist $R_{\max} = 1,33$ km. Der „Radius“ ist jeweils definiert durch das Verschwinden des Druckes $p = T_1^1 = T_2^2 = T_3^3$. Heckmann (Göttingen).

Tolman, Richard C.: Remarks on the possible failure of energy conservation. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 20, 379—383 (1934).

This is a recapitulation of the well-known arguments concerning the possibility of a lack of conservation of energy in β -ray disintegration. Bohr's suggestion that this might result in a statistical non-conservation of energy is repeated. An argument is given which is intended to show that statistical conservation in β -ray disintegration and re-combination would impose an artificial condition on the probability of re-combination. (If this type of argument were valid for this particular process it could also be applied to any other process of dissociation. Ref.) W. H. McCrea (London).

Tiercy, G.: Sur l'équation de condition pour les extrema d'ionisation dans la couche périphérique d'une étoile variable. C. R. Soc. Physique Genève (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques etc. 16) 51, 42—45 (1934).

Aus der bekannten Sahaschen Gleichung zur Bestimmung des Ionisationsgrades x in einer Sternatmosphäre ergibt sich unmittelbar als Bedingung dafür, daß x einen extremen Wert annimmt, eine Differentialbeziehung zwischen Temperatur und Druck. Aus dieser geht hervor, daß in der Atmosphäre eines pulsierenden Sterns das Ionisationsmaximum nach dem Temperaturmaximum eintritt. Führt man in obige Differentialgleichung statt des Druckes die Leuchtkraft bzw. die scheinbare Helligkeit ein, so erhält man nach einigen Umformungen eine zweite Bedingung, die aussagt, daß das Ionisationsmaximum dem Helligkeitsmaximum vorangeht. Klauder (Jena).

Hnatek, Adolf: Über die Sternmodelle der weißen Zwerge aus völlig degenerierter Materie. Astron. Nachr. 252, 237—242 (1934).

Die vorliegende Arbeit enthält eine numerische Auswertung der verschiedenen für weiße Zwerge möglichen Sternmodelle an Hand der am Siriusbegleiter gewonnenen Beobachtungsergebnisse. Es werden behandelt: das von Milne vorgeschlagene Modell aus völlig entarteter Materie (Polytropenindex $n = 1,5$), Chandrasekhars Modell aus relativistisch entartetem Gas ($n = 3$) und zum Vergleich die beiden entsprechenden Eddingtonschen Modelle aus nichtentarteter Materie. Aus den Ergebnissen wird gefolgert, daß von den vier Fällen dem relativistisch entarteten Modell die größte Wahrscheinlichkeit zukommt. Klauder (Jena).

Kalmár, L. v.: Gleichgewicht einer Gaskugel bei veränderlichem Polytropenindex. Astron. Nachr. 252, 263—264 (1934).

Gegenstand der Untersuchung sind Sternmodelle, in denen der Polytropenindex n nicht konstant, sondern eine Funktion des Mittelpunktsabstandes r ist. Unter der Annahme, daß die Dichte $s = u^n$, der Druck $P = P_0 u^{n+1}$ und $r = x \sqrt{P_0 / 4 \pi G}$ ist, wird die Bedingung des mechanischen Gleichgewichts in eine Differentialgleichung in n , u und x transformiert. Im Anschluß hieran wird zur Erläuterung ein willkürlicher, die üblichen Anfangsbedingungen erfüllender Ansatz für die Funktion $n(r)$ bzw. $n(u)$ diskutiert und obige Differentialgleichung für dieses Modell numerisch integriert. Klauder (Jena).

Brill, Alfred: Über eine numerische Lösung der Integralgleichung der Stellarstatistik

$(m) = k \int_0^\infty D(r) \cdot r^2 \cdot \varphi(5 + m - 5 \log r) dr$. Z. Astrophys. 8, 271—280 (1934).

Führt man in der Integralgleichung der Stellarstatistik als Integrationsveränderliche die absolute Größe M statt der Entfernung r ein, so läßt sich aus der Anzahl (m) der Sterne mit der scheinbaren Helligkeit m unmittelbar eine Dichtefunktion $\bar{D}(m)$ ableiten. Die zugehörige Entfernung $\bar{r}(m)$ ergibt sich aus der Beziehung $\bar{r}(m) = 1 + 0,2 [m - \bar{M}(m)]$, wobei $\bar{M}(m)$ ein gewisser Mittelwert der Leucht-

kräfte ist, der implizit auch von der Dichtefunktion abhängt. In erster Näherung kann für $\bar{M}(m)$ eine (zweckmäßig gewählte) Konstante gesetzt werden; der Vergleich der unter dieser Annahme aus der Integralgleichung berechneten Anzahlen $a(m)$ mit den empirischen Daten führt auf verbesserte Werte $\bar{M}(m)$, aus denen dann die zu $\bar{D}(m)$ gehörigen Entfernungen $\bar{r}(m)$ folgen. Ein Beispiel zeigt die Übereinstimmung dieses rein numerischen Verfahrens mit einer der bekannten Lösungen (L. Duns, Diss. Berlin 1929) durch analytische Ansätze. Wempe (Göttingen)

Bok, Bart J.: The stability of moving clusters. Circ. Harvard Coll. Observ. Nr 381—41 (1934).

Das Ziel der Arbeit ist die Aufstellung von Kriterien dafür, ob ein Sternstrom (Bewegungshaufen) unter der „Gezeitenwirkung“ eines galaktischen Zentrums von überwiegender Masse stabil ist oder sich auflöst. Auf einen zunächst als kugelförmig angenommenen Haufen der Entfernung a von der Zentralmasse M wirke in der galaktischen Ebene die Kraftkomponente $f(a) = k^2 M/a^2$; dann treten unter Voraussetzung einer Kreisbahn des Haufens in den Bewegungsgleichungen als wesentliche Konstanten die Größen $\alpha = \frac{df(a)}{da} - \frac{f(a)}{a}$ und $n^2 = \frac{f(a)}{a}$ auf, die Ortskonstanten A und B entsprechen. Für die Stabilität ergibt sich aus dem Jacobi'schen Geschwindigkeitsintegral durch Diskussion der Hillschen Fläche $V^2 = 0$ bei Vernachlässigung der Streuung der Geschwindigkeiten für die mittlere Dichte Δ , innerhalb der Entfernung r vom Haufenzentrum die Bedingung $\Delta > -3\alpha/4\pi k^2 = 0,093$ Sonnenmasse pro parsec³; wird diese kritische Dichte unterschritten, so können Haufensterne in der Richtung vom oder zum galaktischen Zentrum entweichen. Die Bewegungsgleichungen werden ausführlich diskutiert für folgende Fälle: 1. Haufen mit verschwindender mittlerer Dichte; unter Berücksichtigung der Wechselwirkung mit begegnenden Sternen wird die zeitliche Zunahme der Geschwindigkeitsstreuung am stärksten in der Bahnrichtung des Haufens. 2. Ellipsoidischer Haufen mit homogener endlicher Dichte; bei Erreichen der kritischen Dichte, die mit der Abplattung wächst, beginnt die Auflösung in der galaktischen Ebene, aber senkrecht zur Bahnrichtung. Der zeitliche Ablauf des ganzen Auflösungsprozesses wird am Beispiel des Taurus-Haufens numerisch verfolgt; nach $3 \cdot 10^9$ Jahren sind die Haufenmitglieder zerstreut. Die Betrachtung weiterer Beispiele führt auf die Alternative, daß entweder das Alter der lockeren Bewegungshaufen kleiner als $3 \cdot 10^8$ Jahre sein muß oder daß ein massereiches galaktisches Zentrum nicht existiert; die wahrscheinliche Lösung dieser Schwierigkeit liegt in der Unvollständigkeit der empirischen Daten. Für den lokalen Haufen ist die Stabilitätsfrage nicht zu entscheiden; die Deutung des beobachteten K -Effekts als Auflösungs geschwindigkeit ist jedoch möglich. Wempe (Göttingen)

Relativitätstheorie.

Takéuchi, Tokio: On the Lorentz-Einstein transformations. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 16, 252—253 (1934).

Milner, S. R.: Arbitrary character of world-geometry. Nature 133, 830 (1934).

Klier, Em.: Quelques remarques sur la théorie de la relativité. Čas. mat. fys. 61, 284—299 (1934) [Tschechisch].

La théorie classique du mouvement hyperbolique explique la moitié de la déflexion du trajet de la lumière dans un champ gravifique. La théorie large de la relativité donne la valeur précise. Par une méthode élémentaire on peut venir de la théorie spéciale à la théorie large. Par la transformation $r = (1 + 2m/r')^2 r'$ on arrive à une forme très utile pour ds^2 . Le rayon de la courbure du plan non-euclidien est proportionnel au temps de la révolution au cercle. L'expansion de l'univers se rattache à la courbure locale. Un système canonique des équations permet une solution unifiée des cas fondamentaux. Le mouvement du périhel, une classification des orbites ouvertes, l'inflexion du trajet de la lumière, le déplacement rouge et la loi de Weber sont les suites aisément déduites du précédent. Autoreferat.

Milne, E. A.: A one-dimensional universe of discrete particles. Quart. J. Math. Oxford Ser. 5, 30—33 (1934).

The object is to find a velocity distribution $\dots, u_{-n}, u_{-n+1}, \dots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n, \dots$ for a one dimensional set of discrete particles, described by the

sequence for an observer having the velocity $u_0 = 0$, and such that an observer moving with any one of the particles arrives at the same description. The necessary and sufficient condition for this is $u'_{n+1} = u_n$, where u_n is the velocity of the n^{th} particle relative to the observer with velocity u_0 , and u'_{n+1} is the velocity of the $(n+1)^{\text{th}}$ particle relative to the observer with velocity u_1 . Also u'_{n+1} , u_{n+1} are related by the Lorentz composition velocities. The author then finds

$$u_n = c \frac{(1 + u_1/c)^n - (1 - u_1/c)^n}{(1 + u_1/c)^n + (1 - u_1/c)^n}$$

giving the unique solution to the problem in terms of the arbitrary constant u_1 . He shows that this agrees with the solution previously given by him for a continuous distribution, for large n or small u_1 [Z. Astrophys. 6, 35 (1933); this Zbl. 6, 233]. He alludes to the cosmological significance of a solution of the corresponding 3-dimensional problem.

W. H. McCrea (London).

McVittie, G. C.: Remarks on the geodesics of expanding space-time. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 94, 476—483 (1934).

The author discusses the possibility that two observers A and B (A at the origin and B moving arbitrarily) in the expanding universe

$$ds^2 = dt^2 - \frac{e^{\beta(t)}}{c^2} \left(1 + \frac{kr^2}{4R^2}\right)^{-2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

should be able to synchronise their clocks and so define a "cosmic time". At time t_0 by his own clock, A sends a light-pulse which reaches B at time t_B in B 's reckoning, and is reflected back to reach A at time t_2 by A 's clock. A then uses his knowledge of the laws of the propagation of light in the expanding universe to calculate the time t_1 by his own clock at which the light-pulse reached B . This result he communicates to B , who sets his clock so that the reading t_B corresponds to t_1 . (In the Minkowski space-time for observers relatively at rest, this gives $t_B = \frac{1}{2}(t_0 + t_2)$). The observers' clocks are thus synchronised for this particular instant, and the author shows that if B 's notion is of a special kind (corresponding to relative rest in the Minkowski world), then not only is the rule of synchronisation the same whether A or B is the active partner in the process, but the clocks remain permanently synchronised. He thus meets E. A. Milne's criticism that the cosmic time of the expanding universe theory is not kept by the clock of any observer. The paper ends with a discussion of the general notion of particles, and the author concludes that those not moving like B behave, in the expanding universe which corresponds to the space-time of Milne's theory, like Milne's "statistical particles"; and that Milne's argument that the cosmical and gravitational constants depend on the accelerations of these particles is fallacious. Ruse.

Quantentheorie.

Gomes, R. L.: Les matrices de Dirac dans un espace riemannien. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 19, 325—328 (1934).

L'article contient une nouvelle déduction des équations

$$\frac{\partial \gamma^i}{\partial x_i} = \Gamma_{ii}^\mu \gamma_\mu + \Gamma_i \gamma_i - \gamma_i \Gamma_i$$

établies par Fock et étudiées par Schrödinger et par différents autres auteurs. La déduction repose sur l'invariance, pour un „transport par parallélisme“, du module carré d'un vecteur arbitraire.

V. Fock (Leningrad).

Destouches, Jean-Louis: Définition et propriétés du centre de gravité en mécanique ondulatoire. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1576—1578 (1934).

L'auteur étudie les propriétés du centre de gravité en mécanique ondulatoire et énoncé quelques théorèmes (analogues à ceux de la mécanique classique) sur son mouvement.

V. Fock (Leningrad).

Géhéniau, J.: L'électron magnétique et le principe de correspondance de Th. Donder et J. M. Whittaker. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1580—1582 (1934).

Kwall, Bernard: Sur un système de matrices réelles qui intervient dans la théorie de l'électron magnétique lorsqu'on se place dans l'espace-temps de la relativité restreinte. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1582—1584 (1934).

L'auteur appelle bineur une grandeur géométrique à 8 composantes réelles formée par deux spineurs et fait la remarque que la possibilité de former des tenseurs par des combinaisons linéaires entre les composantes du bineur tient à l'existence de deux représentations des quaternions à l'aide des matrices réelles à 4 lignes et à 4 colonnes. [A l'aide des matrices de Dirac, les deux représentations ε_k et e_k ($k = 1, 2, 3, 4$) peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -i\rho_1\sigma_2; & \varepsilon_2 &= i\rho_2; & \varepsilon_3 &= i\rho_3\sigma_2; & \varepsilon_4 &= 1 \\ e_1 &= -i\rho_2\sigma_1; & e_2 &= i\rho_2\sigma_3; & e_3 &= -i\sigma_2; & e_4 &= 1. \end{aligned}$$

V. Fock (Leningrad).

Nishina, Yoshio, Shin-ichiro Tomonaga and Shoichi Sakata: On the photo-electric creation of positive and negative electrons. Sci. Pap. Inst. Physic. Chem. Res. 24, Suppl. Nr 17, 1—5 (1934).

Es wird die Wahrscheinlichkeit der Erzeugung eines Paares positiver und negativer Elektronen durch ein Lichtquant in einem Coulombfeld berechnet. Es werden zur Rechnung die Eigenfunktionen des Elektrons im Coulombfeld benutzt (nicht die Bornsche Näherungsmethode), so daß die Autoren imstande sind, auch den Grenzfall langsamer Elektronen zu berechnen. Im Grenzfall schneller Elektronen ($v \gg c$) stimmen die Resultate mit denen von Heitler und Sauter [Nature 132, 892 (1933); dies. Zbl. 140] überein. Für die Erzeugung langsamer Elektronen erhalten die Autoren hingegen ein anderes Resultat als Oppenheimer und Plesset [Physic. Rev. 44, 53 (1933); dies. Zbl. 8, 140].

Weisskopf (Zürich).

Mattauch, J.: Methoden und Ergebnisse der Isotopenforschung. Physik. Z. 35, 567—621 (1934).

Dolejšek, V.: Sur une modification de la loi de Moseley. Acta Physica Polon. 439—446 (1934).

Der Verf. stellt für die Wellenzahlen der Röntgenniveaus eine Reihenentwicklung auf, die es besonders leicht macht, die Abweichungen der Niveauwerte von einem mit zunehmender Atomnummer glatten Verlauf festzustellen. Die Natur dieser Abweichungen wird kurz besprochen.

R. de L. Kronig (Groningen).

Wiśniewski, Felix Joachim: La constante diélectrique de l'hélium. Acta Physica Polon. 2, 383—391 (1934).

Es wird die dielektrische Konstante von Helium sowie das Ionisierungspotential von Be und der nachfolgenden gleichgebauten Ionen mit Hilfe der 1916 üblichen Methoden der Quantisierung berechnet. Verf. erhält eine vollkommene Übereinstimmung mit der Erfahrung.

R. de L. Kronig (Groningen).

Fock, V.: Über die Anwendbarkeit des quantenmechanischen Summensatzes. Physik 89, 744—749 (1934).

Die quantenmechanischen Summensätze für Oszillatorstärken gelten nur, wenn über sämtliche Elektronen und Zustände eines Atoms summiert wird. Praktisch wichtig sind dagegen einfache Summensätze für die Oszillatorstärken der Valenzelektronen allein, die in der Dispersionsformel auftreten und beobachtbar sind. Der Verf. zeigt, daß die Summensätze für die Oszillatorstärken der Valenzelektronen in der üblichen vereinfachten Form nur bei Vernachlässigung der Austauscheffekte richtig sind. Die Berücksichtigung des Austauschs ergibt dagegen Zusatzglieder, welche die beobachteten Abweichungen von den Summensätzen theoretisch erklären. Dies wird am Beispiel des Na-Atoms durch numerische Auswertung der Zusatzglieder bewiesen.

B. Mrowka (Königsberg i. Pr.).